Grafning metrik xarakteristikalari

Orolov Azizbek Abdumurod o'g'li
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Matematika Talaba

Kalit so'zlar: *Graf, uch, qirra, uchlar orasidagi masofa, zanjir, oddiy zanjir, metrika aksiomalari, uchburchak tengsizligi, uchning ekssentrisiteti, grafning diametri, diametral zanjir, grafning radiusi, grafning markazi, markaziy uch, radial oddiy zanjir, qirraning (yoyning) uzunligi, additivlik, zanjirning (yo'lning) uzunligi, minimal uzunlikka ega yo'l, Deykstra algoritmi.*

Graflarda masofa tushunchasi. Bog'lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu grafda har qanday ikkita v_1 va v_2 uchlar bog'langan bo'lgani uchun chetlari v_1 va v_2 uchlardan iborat bo'lgan hech bo'lmasa bitta marshrut bor. v_1 va v_2 uchlarni bog'lovchi eng qisqa (v_1,v_2) marshrutning uzunligi v_1 va v_2 **uchlar orasidagi masofa** deb ataladi va u $d(v_1,v_2)$ bilan belgilanadi. Ravshanki, eng qisqa marshrut oddiy zanjirdir. Tabiiy ravishda $d(v,v)=0$ deb qabul qilamiz.

Shuni ta'kidlash kerakki, graflarda masofa tushunchasini boshqa usul bilan ham aniqlash mumkin.

Yuqoridagi usul bilan aniqlangan masofa **metrika aksiomalari** deb ataluvchi quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) $d(v_1,v_2)\ge 0$;

2) $v_1=v_2$ bo'lgandagina $d(v_1,v_2)=0$ bo'ladi;

3) $d(v_1,v_2)=d(v_2,v_1)$;

4) $d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3)\ge d(v_1,v_3)$.

Oxirgi aksioma **uchburchak tengsizligi** deb ataladi.

Bog'lamli $G=(V,U)$ graf berilgan bo'lsin. G grafning ixtiyoriy $v\in V$ uchi uchun aniqlangan

$$e(v)=\max_{w\in V} d(v,w)$$

miqdor shu v **uchning ekssentrisiteti** deb ataladi.

Bog‘lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kattasi (maksimali) shu **grafning diametri** deb ataladi.

G grafning diametri, odatda, $d(G)$ bilan belgilanadi: $d(G)=\max\limits_{v\in V} e(v)$. Diametr bu grafning istalgan ikki uchi orasidagi mumkin bo‘lgan eng katta masofadir, ya’ni $d(G)=\max\limits_{v_1,v_2\in V} d(v_1,v_2)$.

Uzunligi $d(G)$ga teng bo‘lgan oddiy zanjir **diametral zanjir** deb ataladi. Tabiiyki, grafda diametral zanjir yagona bo‘lmasligi mumkin.

Bog‘lamli G graf barcha uchlarining ekssentrisitetlari orasidagi qiymati eng kichigi (minimali) shu **grafning radiusi** deb ataladi.

G grafning radiusi, odatda, $r(G)$ bilan belgilanadi: $r(G)=\min\limits_{v\in V} e(v)$. Ravshanki, $r(G)=\min\limits_{v_1\in V}\max\limits_{v_2\in V} d(v_1,v_2)$.

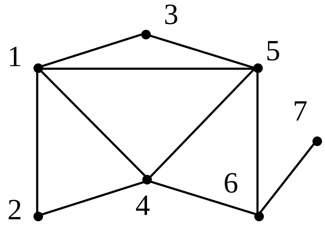
Bog‘lamli G grafdagi ekssentrisiteti radiusga teng v_0 uch **grafning markazi** (**markaziy uchi**) deb ataladi.

Agar v_0 uch G grafning markazi bo‘lsa, u holda $e(v_0)=\min\limits_{v\in V} e(v)$ bo‘ladi, ya’ni grafning markaziy uchi minimal ekssentrisitetga egadir.

Agar grafning markazidan boshqa biror uchigacha bo‘lgan oddiy zanjir eng uzun masofaga ega bo‘lsa, u holda bu zanjir **radial oddiy zanjir** deb ataladi.

Tabiiyki, grafning radiusi uning diametridan katta emas va graf bittadan ko‘p markazga ega bo‘lishi ham mumkin. Bundan tashqari, grafning barcha uchlari uning markaziy uchlari bo‘lishi ham mumkin.

Grafning markaziy uchlarini topish bilan bog‘liq masalalar aholiga xizmat ko‘rsatadigan qandaydir ob’yektning (kasalxona, maktab va shu kabilarning) joylashish o‘rnini aniqlash bilan bog‘liq muammolarni hal qilishda qo‘llanilishi mumkin. Ta’kidlash kerakki, muayyan vaziyatlarda, ko‘pincha, boshqa holatlarni, jumladan, ob’yektgacha borish vaqti, punktlar orasidagi masofa va shu kabilarni hisobga olishga to‘g‘ri keladi. Bunday vaziyatlarda **joylashtirishning minimaks masalalari** deb ataluvchi masalalar vujudga keladi.



1- shakl

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu ghafda $d(1,6)=2$, $d(2,7)=3$, $d(G)=3$; $(1,4,6,7)$ va $(1,5,6,7)$ zanjirlar diametral zanjirlardir, $(1,3)$ va $(1,3,5,6,7)$ zanjirlar esa diametral zanjirdirlar bo‘la olmaydi. Berilgan grafda 4, 5 va 6 belgili uchlar markazlar bo ‘lib, $r(G)=2$ hamda $(6,7)$ va $(6,4,1)$ radial oddiy zanjirlardir. ■

6.2. Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala. Berilgan bog‘lamli grafning har bir qirrasiga (agar berilgan graf oriyentirlangan bo‘lsa – yoyiga) qandaydir haqiqiy son mos qo‘yib, bu sonni **qirraning** (**yoyning**) **uzunligi** deb ataymiz. Qirraning (yoyning) uzunligi **additivlik** xossasiga ega deb faraz qilamiz, ya’ni qirralar (yoylar) yordamida tuzilgan **zanjirning** (**yo‘lning**) **uzunligi** shu zanjirni (yo‘lni) tashkil etuvchi qirralar (yoylar) uzunliklari yig‘indisiga tengdir.

Tabiiyki, qirraning yoki yoyning uzunligi tushunchasi yechilayotgan masalaning mohiyatiga qarab muayyan bir ma’noga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, ikkita shahar orasidagi masofa, qandaydir operatsiyani bajarish uchun zarur mablag‘ (xarajatlar) yoki vaqt va boshqalar. Shu nuqtai nazardan, umuman olganda, bu yerda manfiy uzunlikka ega yoki uzunligi nolga teng qirra (yoy) ham ma’noga ega deb hisoblanadi.

Amaliyotda uchraydigan ko‘plab masalalarda marshrut uzunligi maksimallashtirilishi yoki minimallashtirilishi talab etiladi. Shunday masalalardan biriga, aniqrog‘i, kommivoyajer masalasiga Gamilton graflari bilan shug‘ullanganda duch kelgan edik (ushbu bobning 5- paragrafiga qarang).

$G=(V,U)$ oriyentirlangan graf berilgan bo‘lsin, bu yerda $V=\{1,2,...,m\}$. G grafning biror $s\in V$ uchidan boshqa $t\in V$ uchiga boruvchi yo‘llar orasida uzunligi eng kichik bo‘lganini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz. Bu masalani **minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masala** deb ataymiz. Quyida bu masalaning umumlashmasi hisoblangan masalani qarab, uni ham o‘sha nom bilan ataymiz.

Grafdagi (i,j) yoyning uzunligini c_{ij} bilan belgilab, $C=(c_{ij})$, $i,j=\overline{1,m}$, matritsa berilgan deb hisoblaymiz. Yuqorida ta’kidlaganlarimizga ko‘ra, C matritsaning c_{ij}

elementlari orasida manfiylari yoki nolga tenglari ham bo‘lishlari mumkin. Agar grafda biror i uchdan chiqib j uchga kirruvchi yoy mavjud bo‘lmasa, u holda bu yoyning uzunligini cheksiz katta deb qabul qilamiz ($c_{ij} = \infty$). Bundan tashqari, G grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl mavjud emas deb hisoblaymiz, chunki aks holda uzunligi eng kichik bo‘lgan yo‘l mavjud emas[1].

Minimal uzunlikka ega yo‘l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra[2] tomonidan taklif etilgan algoritm ko‘p qo‘llaniladi. Quyida grafning 1 belgili uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz) grafdagi ixtiyoriy k uchgacha (bu uchni oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo‘lni topish imkonini beruvchi **Deykstra algoritmi** keltirilgan.

Dastlabki qadam. Manbaga (1 belgili uchga) $\varepsilon_1 = 0$ qiymatni mos qo‘yib, bu uchni dastlab $R = \varnothing$ deb qabul qilingan R to‘plamga kiritamiz: $R = \{1\}$. $\overline{R} = V \setminus R$ deb olamiz.

Umumiy qadam. Boshlang‘ich uchi R to‘plamga, oxirgi uchi esa $\overline{R}$ to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha yoylar to‘plami $(R, \overline{R})$ bo‘lsin. Har bir $(i, j) \in (R, \overline{R})$ yoy uchun $h_{ij} = \varepsilon_i + c_{ij}$ miqdorni aniqlaymiz, bu yerda ε_i deb $i \in R$ uchga mos qo‘yilgan qiymat (grafning 1 belgili uchidan chiqib i belgili uchigacha eng qisqa yo‘l uzunligi) belgilangan.

$\varepsilon_j = \min\limits_{(i,j)\in(R,\overline{R})} h_{ij}$ qiymatni aniqlaymiz. $(R, \overline{R})$ to‘plamning oxirgi tenglikda minimum qiymat beruvchi barcha elementlarini, ya’ni (i, j) yoylarni ajratamiz. Ajratilgan yoylarning har biridagi $j \in \overline{R}$ belgili uchga ε_j qiymatni mos qo‘yamiz. ε_j qiymat mos qo‘yilgan barcha j uchlarni $\overline{R}$ to‘plamdan chiqarib R to‘plamga kiritamiz.

Ikkala uchi ham R to‘plamga tegishli bo‘lgan barcha (i, j) yoylar uchun $\varepsilon_i + c_{ij} \ge \varepsilon_j$ tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Tekshirilayotgan tengsizlik

---

[1] Agar grafda umumiy uzunligi manfiy bo‘lgan sikl mavjud bo‘lsa, u holda grafning qandaydir s uchidan shu siklning biror i uchiga o‘tib, keyin esa, sikl bo‘ylab harakatlanib, i uchga istalgancha marta qaytish mumkin bo‘lganligidan, istalgancha kichik uzunlikka ega yo‘l tuzish mumkin.

[2] Deykstra Edsger Vayb (Dijkstra Edsger Wybe, 1930-2002) – Gollandiya matematigi.

o‘rinli bo‘lmagan (ja’ni $\varepsilon_{j_*} > \varepsilon_i + c_{ij_*}$ bo‘lgan) barcha j_* belgili uchlarning har biriga mos qo‘yilgan eski ε_{j_*} qiymat o‘rniga yangi $\varepsilon_i + c_{ij_*}$ qiymatni mos qo‘yamiz va (i, j_*) yoyni ajratamiz. Bunda eski ε_{j_*} qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz.

Uchlarga qiymat mos qo‘yish jarayonini oxirgi (k belgili) uchga qiymat mos qo‘yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1 belgili uchidan (manbadan) chiqib uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo‘l uzunligi ε_k bo‘ladi.

Oxirgi qadam. Grafning oxirgi uchidan boshlab ajratilgan yoylar yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishda uning 1 belgili uchiga kelguncha harakatlanib, natijada grafdagi 1 belgili uchdan ixtiyoriy k uchgacha eng qisqa uzunlikka ega yo‘l(lar)ni topamiz.