Eyler va Gamilton[1] graflari

Orolov Azizbek Abdumurod o'g'li

Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Matematika Talaba

Kalit so'zlar: *Graf, uch, qirra, sikl, Eyler zanjiri, Eyler sikli, Eyler grafi, yarim Eyler grafi, oriyentirlangan Eyler yo'li, oriyentirlangan Eyler grafi, Flyori algoritmi, Gamilton zanjiri, Gamilton sikli, Gamilton grafi, yarim Gamilton grafi, kommivoyajer masalasi.*

Eyler graflari. Graflar nazariyasining shakllanishi Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masala bilan bog'liq ekanligi yaxshi ma'lum. L. Eyler 1736 yilda bu masalaning yechimga ega emasligini isbotladi. U graflar nazariyasining ancha umumiy hisoblangan quyidagi savoliga ham javob topdi: qanday shartlar bajarilganda bog'lamli grafda barcha qirralardan faqat bir marta o'tadigan sikl mavjud bo'ladi?

Grafning har bir qirrasidan faqat bir marta o'tadigan zanjir **Eyler zanjiri** deb ataladi. Yopiq Eyler zanjiriga (ja'ni **Eyler sikliga**) ega graf **Eyler grafi** deb ataladi. Agar grafda yopiq bo'lmagan Eyler zanjiri topilsa, u holda bunday graf **yarim Eyler grafi** deb ataladi.

1- teorema. *Bog'lamli graf Eyler grafi bo'lishi uchun undagi barcha uchlarning darajalari juft bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zarurligi. G Eyler grafida C – Eyler sikli bo'lsin. U holda C sikl bo'ylab harakatlanganda grafning har bir uchidan o'tish uchun bir juft qirradan foydalaniladi – bu qirralardan biri uchga kirish uchun, ikkinchisi esa uchdan chiqish uchun zarur bo'ladi. Bu yerda har bir uch darajasining juftligi C sikldagi har bir qirraning bir marta uchrashi mumkinligidan kelib chiqadi.

Yetarliligi. Endi G grafning har bir uchi darajasi juft bo'lsin deb faraz

[1] Gamilton (William Rowan Hamilton, 1805-1865) – Irlandiya matematigi, fizigi va astronomi.

qilamiz. G graf bog‘lamli bo‘lgani uchun undagi har bir uchning darajasi ikkidan kichik emas. Ma’lumki, agar grafda har bir uchning darajasi ikkidan kichik bo‘lmasa, u holda bunday graf tarkibida sikl mavjud (ushbu bobning 4-paragrafidagi 1- teoremaga qarang).

Demak, G grafning qirralaridan tashkil etilgan qandaydir C_1 sikl bor. Bu siklni uning ixtiyoriy v_1 uchidan boshlab quramiz. Dastlab v_1 uchga insident bo‘lgan ixtiyoriy bir qirrani tanlab, bu qirra bo‘ylab harakatlanamiz va uning boshqa uchiga o‘tamiz. Har safar, imkoniyati boricha, yangi qirra tanlab va bu qirradan o‘tib uning boshqa uchiga boramiz. Shuni ta’kidlash zarurki, bunday o‘tislar jarayonida faqat qirraning yangisini tanlashga harakat qilinadi, uchlar esa istalgancha takrorlanishlari mumkin.

Har bir uchga insident qirralar soni juft bo‘lgani uchun C_1 siklni qurish jarayoni faqat v_1 uchga borgandagina tugaydi. Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) C_1 sikl G grafning barcha qirralaridan o‘tadi, yoki

2) C_1 sikl G grafning barcha qirralaridan o‘tmaydi. Birinchi holda teorema isbotlandi deyish mumkin. Ikkinchi holda G grafdan C_1 siklga tegishli barcha qirralarni olib tashlaymiz va natijada hosil bo‘lgan grafni G_1 deb belgilaymiz. Bu yerda yakkalanib qolgan uchlarni olib tashlash yoki olib tashlamaslik muhim emas. Agar yakkalanib qolgan uchlar olib tashlanmasa, natijada bog‘lamli bo‘lmagan G_1 grafni hosil qi-lishimiz ham mumkin. Grafdan qirralarni bunday olib tashlash amali, tabiiyki, grafning qirralari sonini kamaytiradi, lekin grafdagi uchlarning darajalari juftligi xossasini o‘zgartirmaydi.

G grafning bog‘lamliligiga ko‘ra C_1 sikl va G_1 graf hech bo‘lmasa bitta umumiy uchga ega bo‘lishlari kerak. Shu sababli, C_1 siklda G_1 grafning qirralariga ham insident bo‘lgan qandaydir v_2 uch bor. Bu v_2 uchdan boshlab faqat G_1 grafning qirralaridan tashkil topgan yangi C' siklni qurish mumkin. C' siklni qurish jarayoni faqat v_2 uchga kelib tugashi mumkin.

Oldin qurilgan C_1 siklni ikki qismga ajratamiz:

1) C_1 siklning v_1 uchidan boshlanib v_2 uchida tugovchi qismi (bu oddiy

zanjirni $C_1(v_1, v_2)$ bilan belgilaymiz) va

2) C_1 siklning v_2 uchidan boshlanib v_1 uchida tugovchi qolgan qismi $C_1(v_2, v_1)$

U holda v_1 uchdan boshlab $C_1(v_1, v_2)$ zanjirning qirralari bo‘ylab v_2 uchga boruvchi, keyin C' siklning barcha qirralaridan o‘tuvchi va, nihoyat, $C_1(v_2, v_1)$ zanjirning qirralari bo‘ylab v_1 uchga qaytib keluvchi yangi

$$C_2 = C_1(v_1, v_2) \cup C' \cup C_1(v_2, v_1)$$

siklni hosil qilish mumkin.

Agar C_2 sikl Eyler sikli bo‘lsa, teoremaning tasdig‘i isbotlandi desa bo‘ladi. Aks holda yuqorida bayon etilgan jarayonni takrorlaymiz.

Berilgan G grafdagi qirralar soni chekli bo‘lganligidan, bu jarayon chekli jarayondir. Bu jarayonni yetarlicha takrorlagandan so‘ng, albatta, u Eyler siklini qurish bilan yakunlanadi. ■

1- natija. *Bog‘lamli graf yarim Eyler grafi bo‘lishi uchun undagi ikkitadan ko‘p bo‘lmagan uchlarning darajalari toq bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti 1- teoremaning isbotidan ba’zi o‘zgartirishlar natijasida hosil qilinishi mumkin. ■

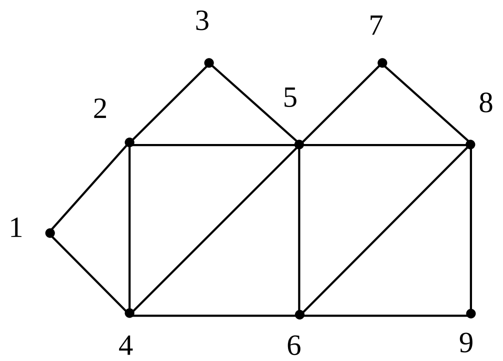
1- teorema asosida Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalaning (ushbu bobning 1- paragrafiga qarang) yechimi mavjud emas degan xulosaga kelamiz, ya’ni Kyonigsberg shahrining ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib Pregel daryosi ustiga qurilgan yettita ko‘priklardan faqat bir martadan o‘tgan holda, yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkin emas.

Oriyentirlangan graflarda oriyentirlangan Eyler yo‘lini izlash bilan shug‘ullanish mumkin. Har bir yoydan faqat bir marta o‘tadigan yo‘l **oriyentirlangan Eyler yo‘li** deb ataladi. Tarkibida oriyentirlangan Eyler yo‘li bor bo‘lgan oriyentirlangan graf **oriyentirlangan Eyler grafi** deb ataladi.

Endi qirralari soni n ga teng bo‘lgan berilgan Eyler grafida Eyler zanjirini tuzishning **Flyori algoritmini**[2] keltiramiz. Bu algoritmga ko‘ra grafning qirralari Eyler siklida uchrashi tartibi bo‘yicha 1 dan n gacha raqamlab chiqiladi.

[2] Bu algoritm E. Lyuka tomonidan e’lon qilinran: Lucas, E. Récréations Mathématiqques. Paris: Gautheir-Villas, 1891.

Berilgan Eyler grafi uchun Flyori algoritmiga binoan quyidagi ikkita qoida



1- shakl

asosida ishlar ketma-ket bajariladi:

1. Grafning ixtiyoriy v uchidan boshlab bu uchga insident bo‘lgan istalgan qirraga (masalan, vv' qirraga) 1 raqami beriladi. Bu qirra grafdan olib tashlanadi va v uchdan v' uchga (ya’ni olib tashlangan qirraga insident uchga) o‘tiladi.

2. Oxirgi o‘tishdan oldingi o‘tish natijasida hosil bo‘lgan uch w bo‘lsin va oxirgi o‘tishda biror qirraga k raqami berilgan deylik. w uchga insident istalgan qirra imkoniyati boricha shunday tanlanadiki, bu qirrani olib tashlash grafdagi bog‘lamlilikni buzmasin. Tanlangan qirraga navbatdagi $(k+1)$ raqami beriladi va bu qirra grafdan olib tashlanadi. ■

Flyori algoritmiga ko‘ra ish yuritish Eyler grafi uchun doimo chekli jarayon ekanligi va bu jarayon doimo grafdan barcha qirralarning olib tashlanishi, ya’ni Eyler zanjirini tuzish bilan tugashi isbotlangan. Shuni ham ta’kidlash kerakki, Flyori algoritmini qo‘llash jarayonida qirralarni tanlash imkoniyatlari ko‘p bo‘lgani uchun, bunday vaziyatlarda, algoritmni qo‘llash mavjud Eyler sikllaridan birini topish bilan cheklanadi. Tushunarliki, Flyori algoritmini takror qo‘llab (bunda qirralarni tanlash jaroyoni algoritmini avvalgi qo‘llashlardagidek aynan takrorlanmasligi kerak) grafda mavjud bo‘lgan barcha Eyler sikllarini topish mumkin.

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Avvalo bu grafning Eyler grafi bo‘lishi shartini, ya’ni 1- teorema shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

Berilgan grafda to‘qqizta uch bo‘lib, 1, 3, 7, 9 belgili uchlarning darajasi ikkiga, 2, 4, 6, 8 belgili uchlarning darajasi to‘rtga, 5 belgili uchning darajasi esa oltiga teng. Xullas, bu grafdagi barcha uchlarning darajalari juftdir. Shuning uchun, 1- teoremaga ko‘ra, 1- shaklda tasvirlangan graf Eyler grafidir va uning tarkibida Eyler sikli mavjud.

Berilgan grafga flyori algoritmini qo‘llab mavjud Eyler sikllaridan birini aniqlaymiz. Dastlabki uch sifatida grafdagi 1 belgili uch olingan bo‘lsin. Bu uchdan ikki yo‘nalishda: $(1;2)$ qirra bo‘ylab yoki $(1;4)$ qirra bo‘ylab harakatlanish mumkin. Masalan, $(1;2)$ qirra bo‘ylab harakatlanib 2 belgili uchga o‘tamiz. Endi harakatni 3 yo‘nalishda: yo $(2;3)$ qirra bo‘ylab, yo $(2;4)$ qirra bo‘ylab, yoki $(2;5)$ qirra bo‘ylab davom ettirish mumkin. Aytaylik, $(2;3)$ qirra bo‘ylab harakatlanib 3 belgili uchga o‘tgan bo‘laylik. Shu usulda davom etib mumkin bo‘lgan Eyler sikllaridan birini, masalan, quyidagi siklni hosil qilamiz:

$$\big((1,2),(2,3),(3,5),(5,4),(4,6),(6,9),(9,8),(8,6),$$
$$(6,5),(5,8),(8,7),(7,5),(5,2),(2,4),(4,1)\big). \ \blacksquare$$