GRAFLAR NAZARIYASI

Orolov Azizbek Abdumurod o'g'li

Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Matematika Talaba

Ushbu bobda graflar nazariyasi elementlari qaraladi. Dastlab graflar haqida qisqa tarixiy ma'lumotlar, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar, graflarning geometrik ravishda, maxsus turdagi ko'phad yordamida, qo'shnilik va insidentlik matritsalari vositasida berilishi yoritiladi. So'ngra grafning elementlari ustida sodda amallar, graflarni birlashtirish, biriktirish va ko'paytirish amallari, marshrutlar va zanjirlar, grafning bog'lamliligi tushunchasi, Eyler va Gamilton graflari, graflarda masofa tushunchasi, minimal masofali yo'l haqidagi masala, daraxt va unga ekvivalent tushunchalar, grafning siklomatik soni bayon qilinadi. Tarmoq tushunchasi, tarmoqdagi oqimlar, maksimal oqim haqidagi masala va bu masalalarni hal qilish uchun Ford algoritmi ham ushbu bobda keltiriladi.

Graflar nazariyasining boshlang'ich ma'lumotlari

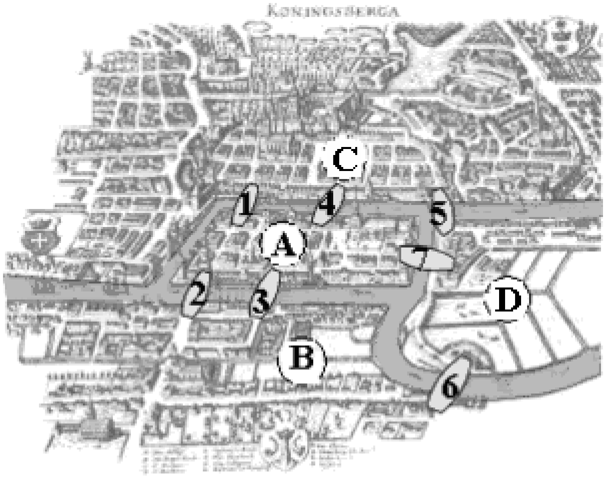
Graf, uch, qirra, yoy, yo'nalish, orgraf, qo'shni uchlar, yakkalangan uch, karrali qirralar, multigraf, psevdograf, nolgraf, to'la, belgilangan va izomorf graflar, grafning geometrik ifodalanishi, uchlar, qirralar va yoylar insidentligi.

1.1. Graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar. 1736 yilda L. Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg[1] ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko'priklar joylashuvi 1- shakldagi qadimiy xaritada tasvirlangan va qurilishi tartibida 1, 2, 3,

[1] Kyonigsberg (Königsberg) – bu shahar 1255 yilda asoslangan bo'lib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirg'oqlarida joylashgan. 1946 yildan boshlab Kaliningrad, hozir Rossiya Federatsiyasi tarkibida.

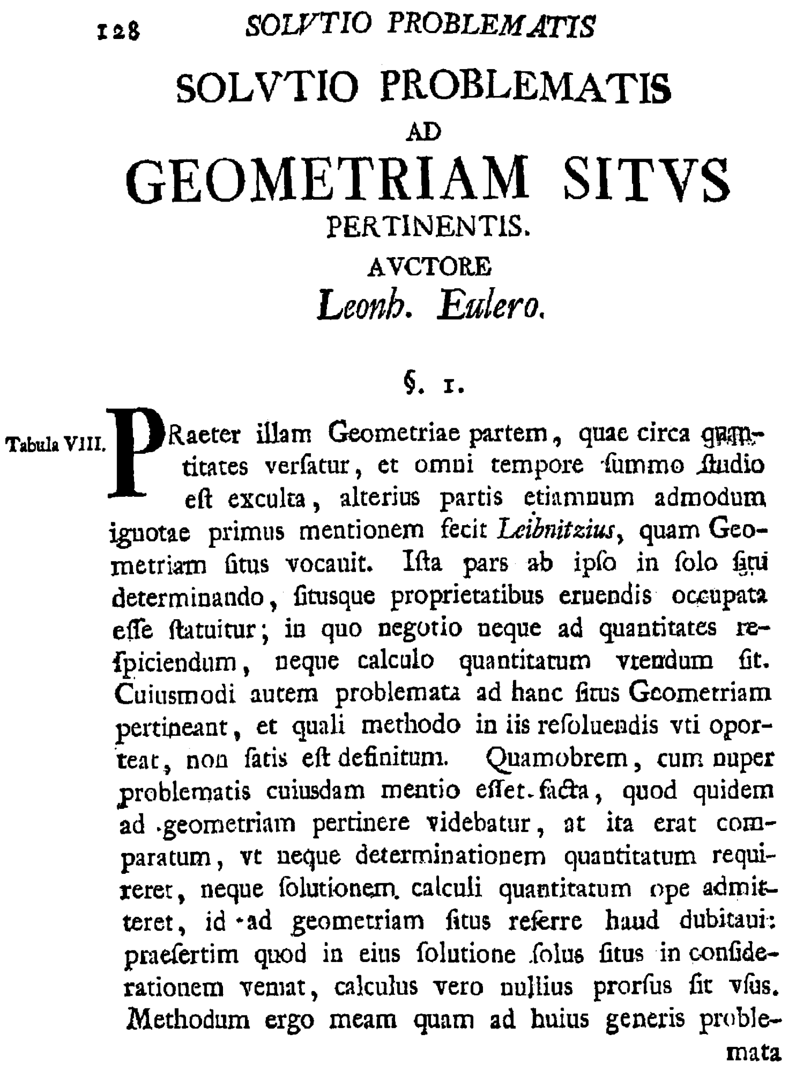
4, 5, 6 va 7 raqamlar bilan belgilangan. Pregel daryosi Kyonigsberg shahrini o‘sha davrda to‘rtta A, B, C va D qismlarga bo‘lgan. Shaharning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib yettita ko‘priklardan faqat bir martadan o‘tib, yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkinmi? Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut (hozirgi vaqtda graflar nazariyasida bu marshrut Eyler sikli nomi bilan yuritiladi, ushbu bobning 5- paragrafiga qarang) mavjudligi shartlari ham topildi. Bu natijalar e’lon qilingan tarixiy ilmiy ishning birinchi sahifasi 2- shaklda keltirilgan. L. Eylerning bu maqolasi yuz yildan ko‘p vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo‘yicha yagona ilmiy ish bo‘lib keldi.



1- shakl

XIX asrning o‘rtalarida graflar nazariyasi bilan bog‘liq tadqiqotlar G. Kirxgof[2] va A. Keli[3] ishlarida paydo bo‘ldi.

[2] Kirxgof (Kirchhoff Gustav Robert, 1824-1887) – olmon faylasufi, fizigi.
[3] Keli yoki Keyli (Cayley Artur, 1821-1895) – ingliz matematigi.



128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

2- shakl

“Graf” iborasi D. Kyonig[4] tomonidan 1936 yilda graflar nazariyasiga bag‘ishlangan dastlabki darslikda[5] uchraydi.

Graflar nazariyasi bo‘yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo‘llaniladi. Ulardan ba’zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o‘yinlar; yo‘llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va komp’yuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

1.2. Grafning abstrakt ta’rifi va u bilan bog‘liq boshlang‘ich tushunchalar. Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta’rifini va boshqa ba’zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo‘shmas to‘plam

[4] Kyonig (Dénes König, 1884-1944) – venger matematigi.
[5] Bu darslik olmon tilida yozilgan.

bo‘lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $< v_1, v_2 >$ ko‘rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to‘plamini (V to‘plamning o‘z-o‘ziga Dekart ko‘paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Denes Kyonig

Graf deb shunday $< V, U >$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \varnothing$ va $U - < v_1, v_2 >$ ($v_1 \in V$, $v_2 \in V$) ko‘rinishdagi juftliklar korteji[6] bo‘lib, $V \times V$ to‘plamning elementlaridan tuzilgandir.

Bundan buyon grafni belgilashda $< V, U >$ yozuv o‘rniga (V, U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko‘rsatish muhim bo‘lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi, masalan, G bilan belgilaymiz.

$G = (V, U)$ graf berilgan bo‘lsin. V to‘plamning elementlariga G **grafning uchlari**, V to‘plamning o‘ziga esa, **graf uchlari to‘plami** deyiladi.

Graflar nazariyasida “uch” iborasi o‘rniga, ba’zan, **tugun** yoki **nuqta** iborasi ham qo‘llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba’zi iboralari bo‘yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta’riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

$G = (V, U)$ grafning ta’rifiga ko‘ra, U bo‘sh kortej bo‘lishi ham mumkin. Agar U bo‘sh bo‘lmasa, u holda bu kortej (a, b) ($a \in V$, $b \in V$) ko‘rinishdagi juftliklardan[7] tashkil topadi, bunda $a = b$ bo‘lishi hamda ixtiyoriy (a, b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin.

$(a, b) \in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibidan bog‘liq holda, ya’ni yo‘nalishning borligi yoki yo‘qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a, b) juftlik uchun uni tashkil etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya’ni $(a, b) = (b, a)$ bo‘lsa, (a, b) juftlikka **yo‘naltirilmagan** (**oriyentirlanmagan**) **qirra** (yoki, qisqacha, **qirra**) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya’ni $(a, b) \neq (b, a)$ bo‘lsa, u holda (a, b) juftlikka **yoy** yoki **yo‘naltirilgan**

[6] Bundan keyin “juftliklar korteji” iborasi o‘rniga, qisqacha kortej iborasini qo‘llaymiz.

[7] Bu yerda ham juftlikning (kortejning) odatdagi $< a, b >$ yozuvi o‘rniga (a, b) yozuvdan foydalanamiz.

(**oriyentirlangan**) **qirra** deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo **grafning qirralari korteji**, yo **yoylari korteji**, yoki **qirralari va yoylari korteji** deb ataymiz.

Grafning uchlari va qirralari (yoylari) uning **elementlari** deb ataladi. $G=(V,U)$ graf elementlarining soni ($|V|+|U|$)ga tengdir, bu yerda G grafning uchlari soni $|V|\neq 0$ va $|U|$ bilan uning qirralari (yoylari) soni belgilangan.

Grafning qirrasi (yoyi), odatda, uni tashkil etuvchi uchlar yordamida (a,b), yoki ab, yoki $(a;b)$ ko‘rinishda belgilanadi. Boshqa belgilashlar ham ishlatiladi: masalan, yoy uchun $(\overrightarrow{a,b})$ yoki $(\overleftarrow{a,b})$, qirra uchun $(\overleftrightarrow{a,b})$, yoy yoki qirra uchun u (ya’ni uchlari ko‘rsatilmasdan bitta harf vositasida) ko‘rinishda.

Graf yoyi uchun uning chetki uchlarini ko‘rsatish tartibi muhim ekanligini ta’kidlaymiz, ya’ni (a,b) va (b,a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a,b) ko‘rinishda ifodalangan bo‘lsa, u holda a uning **boshlang‘ich uchi**, b esa **oxirgi uchi** deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a,b) ko‘rinishda yozilsa, u haqida a **uchdan chiquvchi** (**boshlanuvchi**) va b **uchga kiruvchi** (**uchda tugovchi**) yoy deb aytish ham odat tusiga kirgan.