Graflar ustida amallar

Orolov Azizbek Abdumurod o'g'li

Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Matematika, Talaba

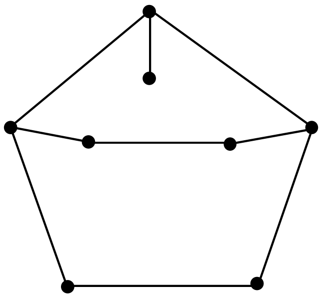
Kalit so’zlar: *Graf, uch, qirra, graflarni birlashtirish, grafdan uchni, qirrani, yoyni olib tashlash, qism graf, to‘ldiruvchi graf, grafga uchni, qirrani, yoyni qo‘shish, qirrani ikkiga bo‘lish, izomorf va gomeomorf graflar, bo‘linish grafi, graflarning birlashmasi, diz’yunkt birlashma, graflarning birikmasi, graflarning ko‘paytmasi,* n *o‘lchovli kub.*

Graflar ustida sodda amallar. Graflar ustida turli amallar bajarish mumkin, masalan, graflarni birlashtirish, biriktirish, ko‘paytirish, grafni qismlarga ajratish va hokazo.

Eng sodda amallardan biri sifatida grafdan **uchni olib tashlash** amalini keltirsa bo‘ladi. Bu amalni qo‘llash berilgan grafning uchlari to‘plamidan birorta element yo‘qotishni (olib tashlashni) anglatadi. Natijada uchlari soni bittaga kamaygan yangi graf hosil bo‘ladi. Albatta, bu amalni uchlari soni ikkitadan kam bo‘lmagan graflar uchun qo‘llash mumkin bo‘lib, uni bajarish jarayonida olib tashlanayotgan uch bilan birgalikda shu uchga insident bo‘lgan barcha qirralar (yoylar) ham olib tashlanadi.

Eng sodda amallar qatoriga grafdan **qirrani** (**yoyni**) **olib tashlash** amalini ham kiritish mumkin. Bu amalga ko‘ra berilgan grafning qirralari (yoylari) to‘plamidan birorta element yo‘qotiladi (olib tashlanadi). Berilgan grafdan qirrani (yoyni) olib tashlayotganda shu qirraga (yoyga) insident uchlarni grafda qoldirish ham yo‘qotish ham mumkin. Bu yerda vaziyatga qarab ish yuritiladi.

$G=(V,U)$ va $G'=(V',U')$ graflar berilgan bo‘lsin. Agar $V\subseteq V'$ va G grafning barcha qirralari (yoylari) G' grafning ham qirralari (yoylari), ya’ni $U\subseteq U'$ bo‘lsa, u holda G graf G' grafning **qism grafi** deb ataladi.



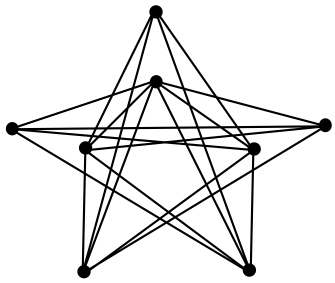
1- shakl

1- misol. 1- shaklda Petersen grafining (ushbu bobning 2- paragrafidagi 8- shaklga qarang) qism graflaridan biri tasvirlangan. ■

Agar G graf karrali qirralarga ega boʻlmasa, u holda uchlari G grafning barcha uchlaridan iborat boʻlgan shunday yagona $\overline{G}$ graf mavjudki, $\overline{G}$ grafdagi barcha juft uchlar faqat va faqat G grafda qoʻshni boʻlmagandagina qoʻshnidir. Bunday $\overline{G}$ graf berilgan G grafning **toʻldiruvchi grafi** deb ataladi.

Berilgan graf uchun toʻldiruvchi grafni qurish jarayonini ham graflar ustida bajariladigan amallar qatoriga kiritish mumkin. G graf uchun **toʻldiruvchi grafni qurish** amalini qoʻllash natijasida $\overline{G}$ graf hosil boʻladi. Isbotlash mumkinki, $\overline{\overline{G}} = G$ munosabat oʻrinlidir.

2- misol. 2- shaklda tasvirlangan graf 1- shaklda ifodalangan graf uchun toʻldiruvchi grafdir.



2- shakl

Graflar ustida shunday amallarni bajarish mumkinki, ular elementlari soni berilgan grafdagidan koʻproq boʻlgan boshqa graflarning hosil boʻlishiga olib keladi. Bunday amallar qatoriga **uchni qoʻshish amali** yoki **qirrani** (**yoyni**) **qoʻshish amalini** kiritish mumkin.

Grafga yangi uchni qoʻshish turlicha usul bilan amalga oshirilishi mumkin. Masalan, yangi v uchni berilgan grafga qoʻshish shu grafning v_1 va v_2 uchlariga insident boʻlgan qandaydir u qirrasiga qoʻshish orqali quyidagicha ikki bosqichda bajarilishi mumkin:

1) u qirra berilgan grafdan olib tashlanadi;

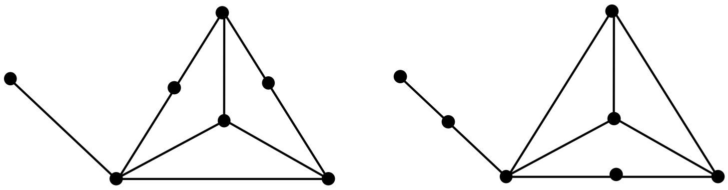
2) hosil boʻlgan grafga ikkita yangi qirralar: v va v_1 uchlarga insident u_1 qirra hamda v va v_2 uchlarga insident u_2 qirra qoʻshiladi.

Bu jarayon grafda **qirraga darajasi 2 boʻlgan yangi uchni qoʻshish** (**kiritish**) yoki **qirrani ikkiga boʻlish amali** deb ataladi.

Agar G graf G' grafdan qirrani ikkiga boʻlish amalini chekli marta ketma-ket qo‘llash vositasida hosil qilingan bo‘lsa, u holda G **graf** G' **grafning bo‘linish grafi** deb ataladi.

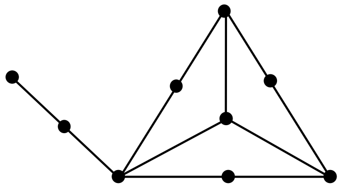
Bo‘linish graflari izomorf bo‘lgan graflar **gomeomorf graflar** deb ataladi.

3- shaklda tasvirlangan graflar izomorf emas, lekin ular gomeomorf, chunki bu



3- shakl

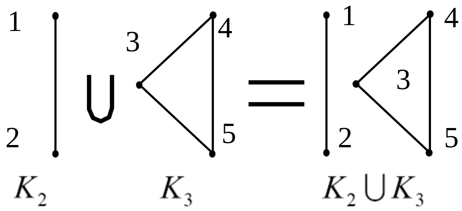
graflarning har biri 4- shaklda tasvirlangan bo‘linish grafiga ega.



4- shakl

3.2. Graflarni birlashtirish. $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ graflar berilgan bo‘lsin. Uchlari to‘plami $V = V_1 \cup V_2$ va qirralari (yoylari) korteji $U = U_1 \cup U_2$ kabi aniqlangan[1] $G = (V, U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning birlashmasi** (**uyushmasi**) deb ataladi va $G = G_1 \cup G_2$ ko‘rinishda belgilanadi.

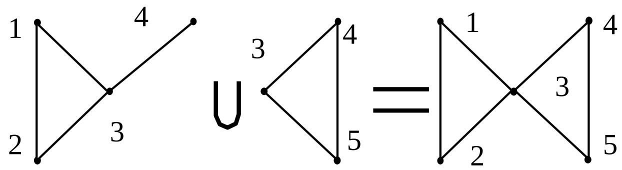
3- misol. 5- shaklda uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birlashmasi amali tasvirlangan. ■



5- shakl

4- misol. Uchlari to‘plamlari kesishadigan graflarning birlashmasi amali 6- shaklda tasvirlangan. ■

Agar birlashtirilayotgan graflarning uchlari to‘plamlari kesishmasa, u holda bu graflarning



6- shakl

birlashmasi **diz’yunkt birlashma** deb ataladi. Masalan, 5- shaklda tasvirlangan

[1] Bu yerda birlashma “$\bigcup$” amali V ning to‘plam, U ning esa kortej ekanligini e’tiborga olgan holda amalga oshiriladi.

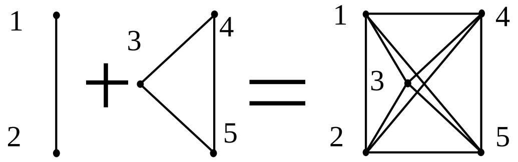
birlashma diz'yunkt, 6- shakldagi birlashma esa – diz'yunkt emas.

3.3. Graflarni biriktirish. $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ graflar berilgan bo'lsin. G_1 va G_2 graflar birlashtirilishi hamda G_1 grafning har bir uchi G_2 grafning har bir uchi bilan qirra vositasida tutashtirilishi natijasida hosil bo'lgan $G = (V, U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning birikmasi** (**tutashmasi**) deb ataladi va $G = G_1 + G_2$ ko'rinishda belgilanadi.

5- misol. Uchta uy va uchta quduq haqidagi boshqotirma masalaga mos graf (ushbu bobning 2- paragrafidagi 9- shaklga qarang) uchlari to'plamlari kesishmaydigan ikkita (O_3) nolgraflarning birikmasidir. ■

6- misol. 7- shaklda uchlari to'plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning birikmasi amali tasvirlangan. ■

Agar uchlari to'plamlari kesishmasi bo'sh bo'lmagan graflarni biriktirish zarur



7- shakl

bo'lsa, u holda hal qilinayotgan masala xossalarini e'tiborga olib ish ko'rish kerakligini ta'kidlaymiz.

3.4. Graflarni ko'paytirish. $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ graflar berilgan bo'lsin. Uchlari to'plami $V = V_1 \times V_2$ bo'lgan $G = (V, U)$ grafning qirralari (yoylari) kortejini quyidagicha aniqlaymiz: agar $v_1' = v_1''$ va $(v_2', v_2'') \in U_2$ yoki $v_2' = v_2''$ va $(v_1', v_1'') \in U_1$ bo'lsa, u holda $(v', v'') \in U$ bo'ladi, bu yerda $v_1', v_1'' \in V_1$, $v_2', v_2'' \in V_2$, $v' = (v_1', v_2') \in V$ va $v'' = (v_1'', v_2'') \in V$. Shunday usul bilan hosol qurilgan $G = (V, U)$ graf G_1 va G_2 **graflarning ko'paytmasi** deb ataladi va $G = G_1 \times G_2$ kabi belgilanadi.

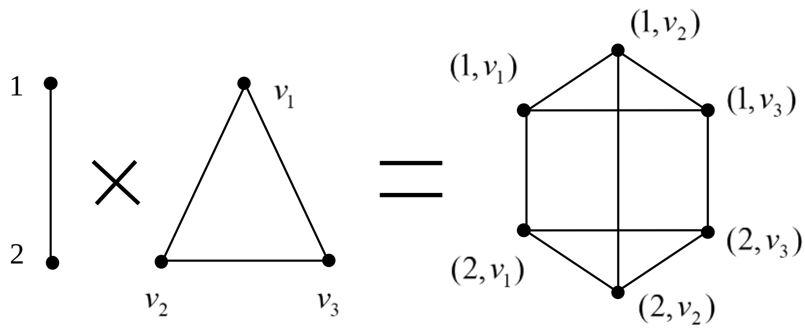
Graflarning ko'paytmasi ta'rifiga asosan berilgan $G_1 = (V_1, U_1)$ va $G_2 = (V_2, U_2)$ graflarning ko'paytmasi hisoblangan G grafdagi:

– uchlar (v_1, v_2) yoki (v_2, v_1) ko'rinishdagi juftliklardan iboratdir, bu yerda $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$;

– $v' = (v_1', v_2') \in V$ va $v'' = (v_1'', v_2'') \in V$ uchlar faqat va faqat shu holda qo'shni bo‘ladilarki, qachonki bu uchlarni (juftliklarni) tashkil qiluvchi elementlarning biri unga mos element bilan ustma-ust tushgan holda boshqa elementlar o‘z grafida qo‘shni bo‘lishsa, bu yerda $v_1', v_1'' \in V_1$, $v_2', v_2'' \in V_2$;

– $|V_1| = m_1$, $|V_2| = m_2$, $|U_1| = n_1$ va $|U_2| = n_2$ munosabatlardan $|V| = m_1 m_2$ va $|U| = m_1 n_2 + m_2 n_1$ bo‘lishi kelib chiqadi.

7- misol. 8- shaklda uchlari to‘plamlari kesishmaydigan K_2 va K_3 graflarning



ko‘paytmasi amali tasvirlangan. ■