# Graflarning berilish usullari

***Orolov Azizbek Abdumurod o'g'li***

*Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Matematika, Talaba*

***Kalit so'zlar:****Graf, orgraf, uch, qirra, yoy, sirtmoq, karrali qirralar, uchning local darajasi, multigraf, ko'phad, grafning uchlari qo'shniligi matritsasi, oriyentirlanmagan multigrafning uchlari qo'shniligi matritsasi, oriyentirlangan grafning uchlari qo'shniligi matritsasi, sirtmoqsiz orgraf uchlari qo'shniligi matritsasi, grafning qirralari qo'shniligi matritsasi, insidentlik matritsasi.*

**1. Grafning geometrik ifodalanishi.** Graflarning turlicha berilish usullari mavjud. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uning berilish usullaridan biridir. Grafning abstrakt matematik ta'rifi uni tasavvur qilish, anglash, uning xossalarini o'rganish va bu xossalarni amalda qo'llash jarayonida ba'zi qiyinchiliklar tug'dirishi tabiiydir. Shuning uchun grafning boshqa berilish usullaridan ham foydalaniladi. Masalan, grafning elementlarini, ya'ni uchlari va qirralarini (yoylarini) yozish yoki aytish grafning berilish usuli sifatida qaralishi munkin. Albatta, grafning yana boshqa berilish usullari ham mavjud. Quyida bu usullarning bir nechasi bilan tanishamiz.

Grafning uchlarini tekislikda yoki fazoda nuqtalar bilan, qirralarini (yoylarini) esa mos uchlarni tutashtiruvchi uzluksiz chiziqlar bilan ifodalab, qandaydir diagrammaga – **grafning ko'rgazmali tasviriga** ega bo'lamiz. Agar uchlar to'plami va bu uchlarning tutashishlarini ko'rgazmali qilib taqdim qilish kerak bo'lsa, grafning geometrik tasvirlanishiga mos shaklni qog'ozda chizib grafni tasvirlash mumkin.

Shuni ta'kidlaymizki, ba'zi hollarda diagrammada graf uchlari doirachalar yordamida yoki qandaydir boshqa usulda ifodalanadi. Grafning qirralariga (yoylariga) mos chiziqlarning to'g'ri yoki egri bo'lishi va ularning uzunligi ahamiyatga ega emas. Muhimi, bu chiziqlar uzluksiz bo'lib, grafning qandaydir ikkita uchlarini tutashtirishi lozim. Agar qirra yo‘nalishga ega bo‘lsa (ya’ni u yoy bo‘lsa), u holda bunday qirrani ifodalovchi chiziqda yo‘nalish biror usul bilan, masalan, strelka bilan ko‘rsatiladi.

Ixtiyoriy graf uchun bunday diagrammalarni istalgancha tuzish mukinligi ravshan. Agar biror diagrammada grafning uchlariga mos keluvchi nuqtalar ustma-ust tushmasa, qirralarga mos keluvchi chiziqlar, chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasa, bunday diagramma **grafning geometrik ifodalanishi** deyiladi. Shuni ta’kidlash kerakki, bitta graf turlicha geometrik ifodalanishi mumkin.

Graflar izomorfligining ta’rifi va grafni geometrik ifodalashning mohiyatidan kelib chiqadiki, abstrakt ta’rif yordamida ifodalangan graf va uning geometrik ifodalanishi o‘zaro izomorf bo‘ladi. Tabiiyki, izomorf graflar turlicha geometrik ifodalanishlari mumkin.

**1- teorema.** *Har qanday chekli grafni 3 o‘lchovli Evklid*[1] *fazosida*[2] *geometrik ifodalash mumkin.*

**Isboti.** Teoremaning quyidagi konstruktiv isbotini keltiramiz. Grafning abstrakt ta’rifiga binoan uning hech bo‘lmasa bitta uchi mavjud. Agar grafda faqat bitta uch bo‘lsa, u holda uni 3 o‘lchovli Evklid fazosining biror nuqtasi sifatida ifodalaymiz. Agar grafda uchlar bittadan ko‘p bo‘lsa, u holda ularni uch o‘lchovli Evklid fazosidagi biror to‘g‘ri chiziqning (hech qaysi ikkitasi ustma-ust tushmaydigan) nuqtalariga mos keladi deb hisoblaymiz. Shu to‘g‘ri chiziqdan qirralarning (yoylarning) har biriga mos keluvchi turli yarim tekisliklarni o‘tkazamiz (graf chekli bo‘lgani uchun buning imkoniyati bor). Har bir qirrani (yoyni) unga mos yarim tekislikda, chetlari mos uchlarni ifodalovchi nuqtalarda bo‘lgan hamda bu to‘g‘ri chiziq bilan boshqa umumiy nuqtasi bo‘lmagan qandaydir chiziq vositasida ifodalaymiz. Yarim tekisliklarning tuzilishiga ko‘ra bu chiziqlar,

[1] Evklid (Εὐκλείδης, eramizdan oldingi III asrda yashagan) – qadimgi yunon (grek) olimi.

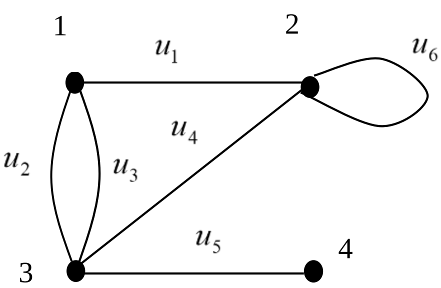
[2] $n$ o‘lchovli Evklid fazosida ikkita $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ vektorlar orasidagi masofa (metrika) $d(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$ formula bo‘yicha aniqlanadi.

chetki nuqtalarni hisobga olmaganda, umumiy nuqtalarga ega emas. ■

Shuni ham ta'kidlash kerakki, 1- teoremadagi 3ni 2ga almashtirib bo'lmaydi, chunki tekislikda qirralarini (yoylarini) ifodalovchi kesishmaydigan (aniqrog'i, chetki nuqtalaridan boshqa umumiy nuqtalari bo'lmagan) chiziqlar yordamida tasvirlash imkoniyati faqat ba'zi graflargagina xos, ya'ni har qanday grafning 2 o'lchovli Evklid fazosida (tekislikda) geometrik ifodalanishi mavjud bo'lavermaydi.

Graflarning geometrik ifodalanishiga doir misollar keltiramiz.

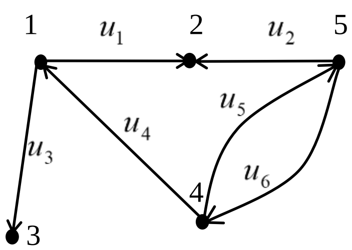
**1- misol.** 1- shaklda tasvirlangan grafni $G=(V,U)$ deb belgilaymiz. Berilgan $G$ graf belgilangan graf bo'lib, 4ta uch va 6ta qirraga ega. Demak, u (4,6)-grafdir. Bu graf uchun: $V=\{1,2,3,4\}$, $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$, $u_1=(1,\ 2)$, $u_2=u_3=(1,\ 3)$, $u_4=(2,\ 3)$, $u_5=(3,\ 4)$, $u_6=(2,2)$. $G$ grafning barcha $u_i$ $(i=\overline{1,6})$ qirralari oriyentirlanmagan (chunki uchlarini tutashtiruvchi chiziklarda yo'nalish ko'rsatilmagan) bo'lgani uchun $G$ oriyentirlanmagan grafdir.



shakl

Grafning qirralaridan biri, aniqrog'i, $u_6$ sirtmoqdir, $u_2$ va $u_3$ esa karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo'shni, 1 va 4 uchlar esa qo'shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar $u_4$ qirraga insident va, aksincha, $u_4$ qirra 2 va 3 uchlarga insidentdir. Bu yerda $u_4$ va $u_5$ qirralar qo'shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, $u_1$ va $u_5$ qirralar esa qo'shni emas. ■

**2- misol.** Geometrik ifodalanishi 2- shakldagi ko'rinishda bo'lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz. Bu grafda o'n bitta element bor: 5ta uch va 6ta yoy, ya'ni shaklda (5,6)-orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V,U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V=\{1,2,3,4,5\}$, $U=<(1,2),(1,3),(5,2),(4,1),(4,5),(5,4)>$ yoki $U=<u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6>$. Berilgan $G$ orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo'q. Bu grafning $(1,3)$ yoyi uchun 1 boshlang'ich, 3 uch esa oxirgi uchdir. ■

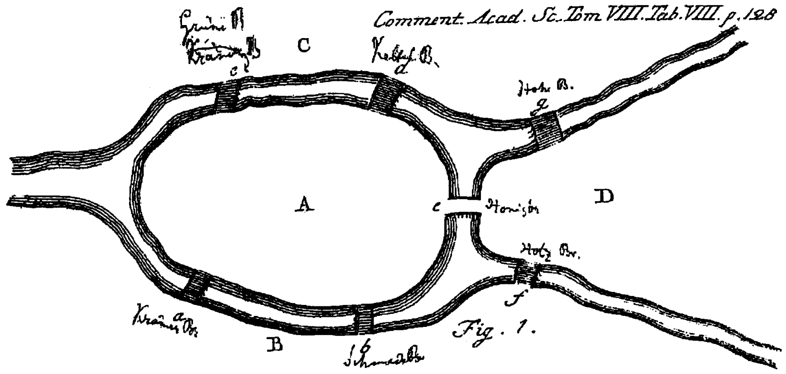


2- shakl

**3- misol.** XVIII asrda Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va

L. Eyler tomonidan yechlishi graflarning matematik nazariyasi paydo bo‘lishiga xizmat qilganligi yuqorida ta’kidlangan edi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko‘priklar joylashuvi 3- shaklda tasvirlangan (bu shakl L. Eylerning birinchi sahifasi ushbu

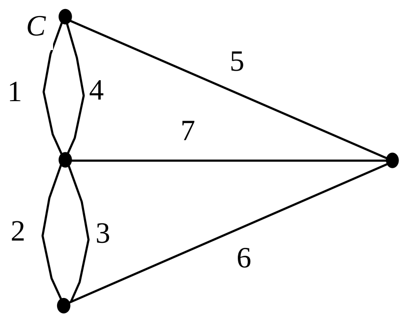



3- shakl

bobning 1- paragrafda keltirilgan ilmiy ishidan olindi).

Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi masalada quyidagi savolga javob berish so‘raladi: “Shaharning to‘rtta $A$, $B$, $C$ va $D$ qismlaridan birida joylashgan uydan chiqib, yettita ko‘priklarning har biridan faqat bir marta o‘tgan holda yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkinmi?”

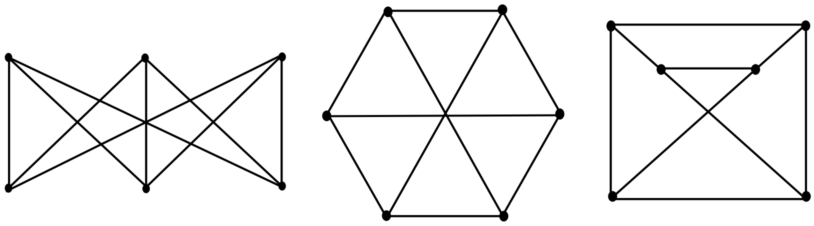
Bu savolga javob izlash maqsadida ko‘priklardan o‘tishlar muhimligini e’tiborga olgan holda qo‘yilgan masalani tahlil qilish uchun 4- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Bu grafning uchlari shaharning $A$, $B$, $C$ va $D$ qismlariga, qirralari esa ko‘priklarga mos keladi. Qaralayotgan graf oriyentirlanmagan graf bo‘lib, 4ta uch va 7ta qirralardan tashkil topgan. Uning qirralari orasida karralilari bor, lekin sirtmoqlar yo‘q.




4- shakl

Kyonigsberg shahridagi ko‘priklardan faqat bir marta o‘tgan holda yurish boshlangan joyga qaytib kelish muammosi, 4- shakldagi grafdan foydalangan holda, ushbu bobning 5- paragrafida hal qilinadi. ■

**4- misol.** 5- shaklda tasvirlangan graflar bir-biriga izomorfdir. ■



5- shakl