

## MARSHRUTLAR VA ZANJIRLAR

*Orolov Azizbek Abdumurod o'g'li*

*Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Matematika, Talaba*

**Kalit so'zlar:** Graf, uch, qirra, marshrut, boshlang'ich uch, oxirgi uch, ichki uch, oraliq uch, ikki tomonlama cheksiz marshrut, bir tomonlama cheksiz marshrut, notrivial marshrut, nol marshrut, marshrutning uzunligi, zanjir, oddiy zanjir, yopiq zanjir, sikl, oriyentirlangan marshrut, yo'l, kontur, bog'langan uchlar, uchlarni bog'lovchi marshrut, bog'lamlı graf, bog'lamlilik komponentalari, ekvivalentlik munosabati, diz'yunktiv birlashma, ajratuvchi qirralar, kesim, ko'prik, ko'ndalangiga izlash.

**1. Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlar.** Uchlari to'plami  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  va qirralar korteksi  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  bo'lgan oriyentirlanmagan  $G = (V, U)$  graf berilgan bo'lsin. Bu  $G$  grafdagi uchlar va qirralarning har ikki qo'shni qirralari umumiy chetki uchga ega

$$(\dots, v_{i_1}, u_{j_1}, v_{i_2}, u_{j_2}, v_{i_3}, \dots)$$

ko'rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi **marshrut** deb ataladi. Marshrutni uning uchlari ketma-ketligi  $(\dots, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots)$  yoki qirralari ketma-ketligi  $(\dots, u_{j_1}, u_{j_2}, \dots)$  ko'rinishda ham belgilash mumkin.

Agar marshrutda qandaydir uchdan oldin uchlar bo'lmasa, bu uchni marshrutning **boshlang'ich uchi** deb, shu uchdan keyin marshrutga tegishli uchlar bo'lmaganda esa, uni marshrutning **oxirgi uchi** deb ataydilar.

Agar marshrutning boshlang'ich uchi  $v_p$  va oxirgi uchi  $v_q$  bo'lsa, u holda uni  $v_p$  **uchdan**  $v_q$  **uchga yo'nalgan marshrut** yoki **chetlari**  $v_p$  va  $v_q$  **bo'lgan marshrut** deb ataladi.

Marshrutdagi ikkita qoshni qirralarga tegishli uch **ichki uch** yoki **oraliq uch** deb ataladi.

Marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin bo'lgani uchun marshrutning ichki uchi, bir vaqtning o'zida, uning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi bo'lishi ham mumkin va teskarisi, marshrutning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi uning ichki uchi bo'lishi ham mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

– boshlang'ich uchga ham oxirgi uchga ham ega bo'lmasligi mumkin (bunday marshrut **ikki tomonlama cheksiz marshrut** deb ataladi);

– boshlang'ich uchga ega bo'lib, oxirgi uchga ega bo'lmasligi mumkin yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo'lib, boshlang'ich uchga ega bo'lmasligi mumkin (**bir tomonlama cheksiz marshrut**);

– yagona qirradan iborat bo'lishi mumkin (**notrivial marshrut**);

– birorta ham qirraga ega bo'lmasligi mumkin (**nol marshrut** yoki **trivial marshrut**).

**Marshrutning uzunligi** deb undagi qirralar soniga aytiladi.

Turli qirralardan tashkil topgan marshrutga **zanjir** deb ataladi. Agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo'lsa, u holda uni **oddiy zanjir** deb ataydilar.

Berilgan  $(v_1, v_2, \dots, v_s)$  zanjir yoki oddiy zanjir uchun  $v_1 = v_s$  bo'lsa, u **yopiq zanjir** deb ataladi. Hech bo'lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir **sikl** deb ataladi.

Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar sikl tashkil etishi ravshandir.

Tushunarliki, grafdagi zanjir grafning qism grafi deb qaralishi mumkin.

**1- misol.** Ushbu bobning 2- paragrafidagi 1- shaklda tasvirlangan graf uchun  $(3, u_4, 2, u_1, 1, u_1, 2, u_6, 2, u_4, 3, u_5, 4)$

ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo'nalgan marshrutdir, bunda 3 – boshlang'ich uch, 4 – oxirgi uchdir. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6a teng bo'lib, u zanjir bo'la olmaydi, chunki unda 1 belgili uch 2 marta (bir marta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta esa oxirgi uch sifatida) qatnashmoqda.

Yana o'sha graf uchun (3,2,1,3) zanjirning oxirgi bo'g'ini sifatida  $u_2$  yoki  $u_3$  qirralardan qaysisi olinishiga bog'liqsiz ravishda, u yopiq zanjir va sikldir. ■

Oriyentirlangan graflar uchun ham undagi yoylarning yo'nalishini (oriyentatsiyasini) inobatga olmasdan oriyentirlanmagan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Lekin, oriyentirlangan graflar uchun oriyentirlangan marshrut tushunchasini kiritish tabiiydir.

Yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi **oriyentirlangan marshrut** deb ataladi.

Oriyentirlangan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o'xshash **yo'l** (yoki **oriyentirlangan zanjir**) tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang'ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir **kontur** deb ataladi.

**2- misol.** Ushbu bobning 2- paragrafidagi 2- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Uning uch va qirralaridan tuzilgan

$$(3, u_3, 1, u_4, 4, u_5, 5, u_2, 2, u_1, 1)$$

ketma-ketlik oriyentirlanmagan marshrut va zanjirdir, lekin u oddiy zanjir bo'la olmaydi. Bu ketma-ketlik oriyentirlangan marshrut ham bo'la olmaydi, chunki unda marshrut yo'nalishiga teskari yo'nalishga ega yoylar bor ( $u_3, u_4, u_1$ ).

Qaralayotgan graf uchun ( $u_6, u_5, u_2$ ) ketma-ketlik oriyentirlangan marshrutni tashkil etadi. Bu marshrut yo'ldir, lekin u kontur emas. Berilgan grafda faqat bitta kontur bo'lib, bu konturni ( $4, u_5, 5, u_6, 4$ ) yoki ( $5, u_6, 4, u_5, 5$ ) ko'rinishda ifodalash mumkin. ■

**1- teorema.** Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bu graf siklga ega.

**Isboti.** Agar grafda sirtmoqlar yoki karrali qirralar bo'lsa, teoremaning tasdig'i to'g'riligi ravshandir. Shuning uchun teorema tasdig'ini graf sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan holda isbotlaymiz.

Faraz qilaylik,  $v \in V$  berilgan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan  $G = (V, U)$  grafning ixtiyoriy uchi bo'lsin. Qaralayotgan  $v$  uchga qo'shni  $v_1$  uchni va bu uchga  $v$  dan farqli boshqa qo'shni  $v_2$  uchni,  $v_2$  uchga esa  $v_1$  dan farqli boshqa

qo'shni  $v_3$  uchni, va hakoza,  $v_i$  uchga  $v_{i-1}$  dan farqli boshqa qo'shni  $v_{i+1}$  uchni, va hakoza, tanlab,

$$((v, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}), \dots)$$

qirralar ketma-ketligini tuzamiz. Teoremaning shartlariga ko'ra yuqoridagi jarayonni amalga oshirish va talab etilgan xossaga ega  $v_{i+1}$  uchni topish mumkinligini ta'kidlaymiz.

Grafning uchlari to'plami  $V$  chekli to'plam bo'lganligidan, yuqorida bayon etilgan uchlar ketma-ketligini qurish jarayonida chekli qadamdan so'ng albatta oldin uchragan uchlardan birini tanlashga majbur bo'lamiz. Agar  $v_k$  uch ketma-ketlikda ikki marta uchragan dastlabki uch bo'lsa, ketma-ketlikka qirralar qo'shish jarayonini to'xtatamiz, chunki tuzilgan qirralar ketma-ketligining  $v_k$  uch ikki marta qatnashgan qismi biz izlayotgan sikldir. ■

**4.2. Grafning bog'lamliligi tushunchasi.** Agar oriyentirlanmagan grafda chetlari  $a$  va  $b$  uchlardan iborat marshrut topilsa, bu  $a$  va  $b$  uchlar **bog'langan** deb, marshrutning o'zi esa  $a$  va  $b$  **uchlarni bog'lovchi marshrut** debataladi.

Tabiiyki, agar qandaydir uchlarni bog'lovchi marshrut biror  $a_i$  uchdan bir necha marta o'tsa, u holda marshrutning siklik qismini olib tashlab (bunda siklik qismning o'rniga marshrutda faqat  $a_i$  uch qoldiriladi) yana o'sha uchlarni bog'lovchi oddiy zanjir ko'rinishdagi marshrutni hosil qilish mumkin. Shuning uchun, marshrut bilan bog'langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham bo'g'langan bo'ladi degan xulosaga kelamiz.

Bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikkita uchlari bog'langan graf **bog'lamli graf** deb ataladi.

Agar grafdagi ikkita uchni biror oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda bu ikkita uch **ekvivalent (bog'langan)** deyiladi. Bunday uchlar to'plami grafda **ekvivalentlik munosabati** bilan aniqlangan deb hisoblanadi. Uchlar to'plami bo'yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafni **bog'lamlilik komponentalari** (qisqacha, **komponentalari**) deb ataluvchi bog'lamli qismlarning birlashmasi deb qarash mumkin. Bu yerda berilgan graf

bogʻlamlilik komponentalariga boʻlaklandi (ajratildi) deb aytish mumkin. Isbotlash mumkinki, har qanday graf oʻzining bogʻlamlilik komponentalarining dizʻyunktiv birlashmasi sifatida ifodalanishi mumkin, bunda grafning bogʻlamlilik komponentalariga boʻlaklanishi bir qiymatli aniqlanadi.