

## TARMOQLAR

*Orolov Azizbek Abdumurod o'g'li*

*Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti Matematika, Talaba*

**Kalit so'zlar:** Graf, uch, qirra, orgraf, yoy, tarmoq, to'plam, blok-sxema, gipergraf, bog'lamlil tarmoq, sirtmoq, yoyning o'tkazish qobiliyati, uchning chiqish va kirish yarim darajalari, manba, o'p'qon, tarmoqdagi oqim, yoy bo'ylab oqim, tarmoqdagi oqim miqdori, maksimal oqim, to'yingan, to'yinmagan, to'g'ri va teskari yo'ylar, zanjir, tarmoqning "tor joyi", kesim, manbani o'p'qondan ajratuvchi kesim, kesimning o'tkazish qobiliyati, minimal kesim.

**Tarmoq tushunchasi.** Graflar nazariyasida hozirgacha ba'zi iboralar bo'yicha umumiy kelishuv qaror topmaganligini qayd qilgan edik. Bu fikr graflar nazariyasining **tarmoq** va tarmoqqa oid tushunchalari bilan ish ko'rganda yaqqol namoyan bo'ladi. Ba'zan, "tarmoq" iborasi o'rniga "to'r" iborasini ham qo'llaydilar. Masalan, S.V. Yablonskiyning 1986 yilda bosilib chiqqan Введение в дискретную математику (Diskret matematikaga kirish) nomli o'quv qo'llanmasida ([1]da) graf tushunchasi umumlashtirilib, tarmoqning quyidagi ta'rifi berilgan va "tarmoq" tushunchasi xususida fikrlar ham bayon qilingan.

"Berilgan  $M = \{a_1, a_2, \dots\}$  to'plam va har bir  $E_i$  elementi  $M$  dan olingan  $R = \{E_0; E_1, E_2, \dots\}$  majmuani (naborni) **tarmoq** deb ataymiz va  $M(E_0; E_1, E_2, \dots)$  bilan belgilaymiz, bu yerda  $E_i = (a_{v_1(i)}, a_{v_2(i)}, \dots)$ .  $M$  to'plamning ob'yektlari tarmoqning **uchlari** deb,  $E_0$  majmuadagi ob'yektlar esa – **tarmoqning qutblari** deb ataladi".

Yuqorida eslatilgan kitobda ta'kidlanishicha: "Adabiyotda tarmoq tushunchasiga yaqin tushunchalar ham uchraydi, masalan, "**blok-sxema**" tushunchasi, "**gipergraf**" tushunchasi. Blok-sxema tushunchasi tarmoq tushunchasidan oldin paydo bo'lgan, gipergraf tushunchasi esa – keyinroq".

Gipergraf tushunchasi – bu graf tushunchasining shunday umumlashmasiki,

bunda qirralar na faqat ikki elementli bo'lishlari, ular uchlar to'plamining istalgan qism to'plamlari bo'lishlari ham mumkin.

Graf tushunchasining turli umumlashmalarini ma'qullagan hamda bunday umumlashmalar turli masalarni hal etishda zarur qurol sifatida ishlatilishini ta'kidlagan holda [10] kitobdagi tarmoq tushunchasining bir-biriga ekvivalent bo'lgan quyidagi ikki ta'rifini keltiramiz:

1) har bir  $a$  yoyiga  $\psi(a)$  manfiymas haqiqiy son mos qo'yilgan  $N$  orgraf **tarmoq** deb ataladi;

2) **tarmoq** deb shunday  $(D, \psi)$  juftlikka aytiladiki, bunda  $D = (V, U)$  – orgraf,  $\psi$  esa  $D$  orgrafning yoylari to'plamini manfiymas haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya.

**8.2. Tarmoqdagi oqimlar.** Graflar (orgraflar) bilan bog'liq ko'plab tushunchalarni osonlik bilan tarmoqlar uchun ko'chirish mumkin.

$T = (G, b)$  tarmoq berilgan bo'lsin, bu yerda  $G = (V, U)$  – bog'lamli graf (yoki orgraf, yo bo'lmasa, aralash graf),  $b$  esa  $G$  grafning yoylarini manfiymas  $b_{ij}$  ( $v_i, v_j \in V$ ) haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi funksiya.  $G$  grafda sirtmoq va karrali qirra va/yoki yoylar bo'lmasin deb faraz qilamiz. Ikkita  $v_i$  va  $v_j$  uchlarni tutashtiruvchi oriyentirlanmagan yoyni (qirrani) ikkita oriyentirlangan yoylarga almashtirish mumkin deb hisoblaymiz. Shuning uchun bundan buyon  $G$  grafni orgraf deb hisoblash mumkin.

Ta'kidlaymizki, “tarmoq” tushunchasi har bir yoyga bir necha sonlarni mos qo'yish imkoniyatini beradi, grafda (orgrafda) esa yoy faqatgina mos uchlarning tutashtirilgan yoki tutashtirilmaganligini aniqlaydi, xolos. Har bir  $(v_i, v_j)$  yoyga manfiymas  $b_{ij}$  sonni mos qo'yib, bu sonni **yoyning o'tkazish qobiliyati** deb ataymiz. Tarmoqning har bir  $v \in V$  uchi uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz:  $v$  **uchning chiqish yarim darajasi**  $\vec{p}(v)$  – bu  $v$  uchdan chiquvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisi,  $v$  **uchning kirish yarim darajasi**  $\bar{p}(v)$  – bu  $v$  uchga kiruvchi barcha yoylar o'tkazish qobiliyatlari yig'indisi.

“Ko‘rishishlar” haqidagi lemma bu yerda quyidagicha ifodalanadi: *tarmoqning barcha uchlari chiqish yarim darajalari yig‘indisi ularning kirish yarim darajalari yig‘indisiga tengdir.*

Grafning uchlari orasida kirish yarim darajalari nolga teng bo‘lganlari guruhini ajratamiz. Bu guruhga tegishli uchlarning har biri **manba** deb ataladi. Shunga o‘xshash, orgrafning chiqish yarim darajalari nolga teng bo‘lgan uchlari guruhini ham ajratish mumkin. Bu guruhga tegishli har bir uch **o‘pqqon** deb ataladi.

Faraz qilaylik,  $G$  orgraf faqat bitta  $v_s$  manbaga va faqat bitta  $v_t$  o‘pqqonga ega bo‘lsin. Bir necha manba va/yoki o‘pqqonga ega bo‘lgan tarmoqning orgrafiga yangi elementlar qo‘shib olish yo‘li bilan yuqoridagi xususiy holga osonlik bilan keltiriladi<sup>1</sup>.

$G$  orgrafning har bir  $(v_i, v_j)$  yoyiga manfiy mas  $x_{ij}$  sonlar mos qo‘yilgan bo‘lib, biror  $p \geq 0$  uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

$$1) \sum_{(v_i, v_k) \in U} x_{ik} - \sum_{(v_k, v_j) \in U} x_{kj} = \begin{cases} -p, & \text{agar } k = s \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } k \neq s \text{ va } k \neq t \text{ bo'lsa,} \\ p, & \text{agar } k = t \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

2)  $G$  orgrafda mavjud barcha  $(v_i, v_j)$  yoylar uchun  $0 \leq x_{ij} \leq b_{ij}$ .

Bu shartlar bajarilganda  $X = \{x_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U\}$  to‘plamga  $T$  tarmoqdagi  $v_s$  manbadan  $v_t$  o‘pqqonga yo‘nalgan **oqim** deb,  $p$  miqdorga esa, bu  $X$  **oqimning miqdori** deb ataladi. 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi har bir  $x_{ij}$  songa  $(v_i, v_j)$  **yoy bo‘ylab oqim** yoki **yoy oqimi** deyiladi.

Yuqoridagi 1) shartga ko‘ra manba va o‘pqqondan farqli istalgan uchga “kiruvchi” oqim shu uchdan “chiquvchi” oqimga tengdir, 2) shartga ko‘ra esa, istalgan yoy bo‘ylab oqim miqdori shu yoyning o‘tkashish qobiliyatidan oshmaydi.

1) shartdan ko‘rinib turibdiki, manbaga insident yoylar bo‘yicha oqimlar yig‘indisi o‘pqqonga insident yoylar bo‘yicha oqimlar yig‘indisiga tengdir:  $\sum_{(v_s, v_j) \in U} x_{sj} = \sum_{(v_i, v_t) \in U} x_{it} = p$ .

<sup>1</sup> Masalan, agar manbalar bittadan ko‘p bo‘lsa, u holda yangi (qalbaki) manba tarmoqqa kiritiladi va grafning qalbaki manbaga mos yangi uchi uning haqiqiy manbalariga mos uchlari bilan yoylar vositasida tutashtiriladi. O‘pqqonlar ko‘p bo‘lganda ham shunga o‘xshash ish amalga oshiriladi.

**1- misol.** 1- shaklda  $v_0$  manba va  $v_5$  o'pqoni bo'lgan  $T = (G, b)$  tarmoq tasvirlangan bo'lib, uning yoylari yoniga mos o'tkazish qobiliyatlari yozilgan, bunda  $G = (V, U)$ ,

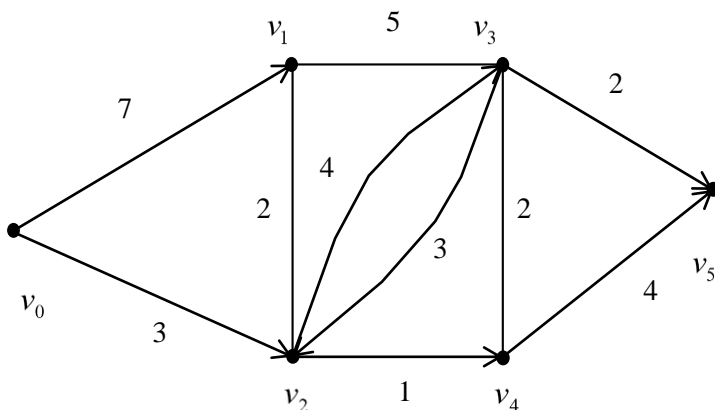
$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

$$U = \{(\overrightarrow{v_0, v_1}), (\overrightarrow{v_0, v_2}), (\overrightarrow{v_1, v_2}), (\overrightarrow{v_1, v_3}), (\overrightarrow{v_2, v_3}), (\overrightarrow{v_2, v_4}), (\overrightarrow{v_3, v_4}), (\overrightarrow{v_3, v_5}), (\overrightarrow{v_4, v_5})\}$$

Bu tarmoq uchun  $b_{01} = 7, b_{02} = 3, b_{12} = 2, b_{13} = 5, b_{21} = 2, b_{23} = 4, b_{24} = 1, b_{31} = 5, b_{32} = 3, b_{34} = 2, b_{35} = 2, b_{43} = 2, b_{45} = 4$  ekanligi shakldan ko'rinib turibdi.

Tarmoqning har bir uchi uchun chiqish yarim darajalari va kirish yarim darajalarini aniqlaymiz:  $\bar{\rho}(v_0) = 10, \bar{\rho}(v_1) = 7, \bar{\rho}(v_2) = 7, \bar{\rho}(v_3) = 12, \bar{\rho}(v_4) = 6, \bar{\rho}(v_5) = 0$ ,  $\bar{\rho}(v_0) = 0, \bar{\rho}(v_1) = 14, \bar{\rho}(v_2) = 8, \bar{\rho}(v_3) = 11, \bar{\rho}(v_4) = 3, \bar{\rho}(v_5) = 6$ .

Berilgan  $T$  tarmoq orqali  $v_0$  manbadan  $v_5$  o'pqonga 4 kattalikka ega bo'lgan  $X^1$  oqimni quyidagi sonlar to'plami bilan ifodalash mumkin:  $x_{01} = 2, x_{02} = 2, x_{12} = 0, x_{13} = 2, x_{21} = 0, x_{23} = 1, x_{24} = 1, x_{31} = 0, x_{32} = 0, x_{34} = 2, x_{35} = 1, x_{43} = 0, x_{45} = 3$ . Qaralayotgan  $X^1$  oqimning miqdori  $p_1 = x_{01} + x_{02} = x_{35} + x_{45} = 4$ . ■



Tarmoq bo'ylab o'tkazish mumkin bo'lgan oqimlar orasida miqdori eng katta (maksimal) oqimni topish amaliyot nuq-tai nazaridan katta ahamiyatga egadir. Bunday oqimlar **maksimal oqimlar** deb ataladi. 1- misolda keltirilgan oqim maksimal oqim emas, chunki berilgan tarmoq uchun miqdori 5 bo'lgan oqim bor (ushbu paragrafning oxiriga qarang).

Albatta, umumiy holda, tarmoqda bir necha turli maksimal oqimlar bo'lishi

mumkin.

Maksimal oqimni o'rganishda quyidagi tushunchalarni kiritish maqsadga muvofiqdir. **To'yingan yoy** – bu yoy bo'ylab oqim miqdori uning o'tkazish qobiliyatiga teng, **to'yinmagan yoy** – bu yoy bo'ylab oqim miqdori uning o'tkazish qobiliyatidan kichik.

**2- misol.** 1- misolda qaralgan tarmoq uchun aniqlangan  $X^1$  oqimda  $x_{01} = 2 < b_{01} = 7$  va  $x_{24} = 1 = b_{24}$  bo'lgani uchun  $(v_0, v_1)$  to'yinmagan,  $(v_2, v_4)$  esa to'yingan yoylardir. ■

Tarmoqdagi oqimlarni o'rganishda **zanjir** tushunchasi muhim rol o'ynaydi. Bu yerda zanjir deganda tarmoqdagi yo'nalishi e'tiborga olinmasdan bir-biriga ulangan yoylar ketma-ketligini tushunamiz. Biror zanjirga tegishli yoyning yo'nalishi zanjirdagi uchlar ketma-ketligini o'tish yo'nalishiga mos tushsa, bu yoyni **to'g'ri yoy** deb, aks holda esa, uni **teskari yoy** deb ataymiz.