DARAXTLAR

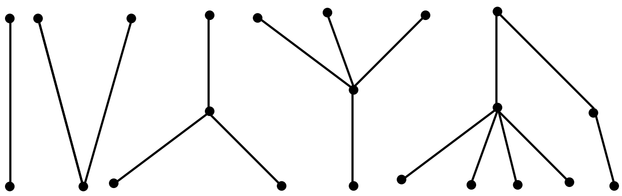
Orolov Azizbek Abdumurod o'g'li

Denov tadbirkorlik va pedagogika institute Matematika, Talaba

Kalit so'zlar: *Graf, uch, qirra, daraxt, o'rmon, asiklik graf, marshrut, sikl, zanjir, oddiy zanjir, ko'prik, grafning sinch daraxti, grafning sinch o'rmoni, grafning siklomatik soni.*

Daraxt va unga ekvivalent tushunchalar. Siklga ega bo'lmagan orientirlanmagan bog'lamli graf **daraxt** deb ataladi[1]. Ta'rifga ko'ra daraxt sirtmoqlar va karrali qirralarga ega emas. Siklga ega bo'lmagan orientirlanmagan graf **o'rmon** (**asiklik graf**) deb ataladi.

1- misol. 1- shaklda bog'lamli komponentali soni beshga teng bo'lgan graf tasvirlangan bo'lib, u o'rmondir. Bu grafdagi bog'lamli komponentalarning har biri

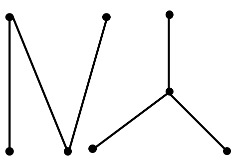


daraxtdir. ■

2- misol. 2- shaklda to'rtta uchga ega bir-biriga izomorf bo'lmagan barcha (ular bor-yog'i ikkita) daraxtlarning geometrik ifodalanishi tasvirlangan. ■

Beshta uchga ega bir-biriga izomorf bo'lmagan barcha daraxtlar uchta, oltita uchga ega bunday barcha daraxtlar esa oltita ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Daraxt tushunchasiga boshqacha ham ta'rif berish mumkin. Umuman olganda,



$G \ (m,n)$- graf uchun **daraxtlar haqidagi asosiy teorema** deb ataluvchi quyidagi teorema o'rinlidir.

1- teorema. *Uchlari soni* m *va qirralari soni* n *bo'lgan* G

[1] Orientirlangan daraxt tushunchasi ham bor.

graf uchun quyidagi tasdiqlar ekvivalentdir:

1) G daraxtdir;

2) G asiklikdir va $n=m-1$;

3) G bog'lamlidir va $n=m-1$;

4) G bog'lamlidir va undan istalgan qirrani olib tashlash amalini qo'llash natijasida bog'lamli bo'lmagan graf hosil bo'ladi, ya'ni Gning har bir qirrasi ko'prikdir;

5) G grafninng o'zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtiriladi;

6) G asiklik bo'lib, uning qo'shni bo'lmagan ikkita uchini qirra bilan tutashtirish amalini qo'llash natijasida faqat bitta siklga ega bo'lgan graf hosil bo'ladi.

Isboti. Teoremaning 1) tasdig'idan uning 2) tasdig'i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf daraxt bo'lsin. Daraxtning ta'rifiga ko'ra, u asiklik bo'lishini ta'kidlab, m bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llaymiz.

Matematik induksiya usulining bazasi: agar $m=1$ bo'lsa, u holda G daraxt faqat bitta uchdan tashkil topgan bo'ladi. Tabiiyki, agar bitta uchga ega bo'lgan grafda sikl bo'lmasa, u holda unda birorta ham qirra yo'q, ya'ni $n=0$. Demak, bu holda tasdiq to'g'ridir.

Induksion o'tish: G daraxt uchun $k\geq 2$ va $m=k$ bo'lganda 2) tasdiq o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. Endi uchlari soni $m=k+1$ va qirralari soni n bo'lgan daraxtni qaraymiz. Bu daraxtning ixtiyoriy qirrasini (v_1,v_2) bilan belgilab, undan bu qirrani olib tashlasak, v_1 uchdan v_2 uchgacha marshruti (aniqrog'i, zanjiri) mavjud bo'lmagan grafni hosil qilamiz, chunki agar hosil bo'lgan grafda bunday zanjir bor bo'lsa edi, u holda G daraxtda sikl topilar edi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas.

Hosil bo'lgan graf ikkita G_1 va G_2 bog'lamli komponentalardan iborat bo'lib, bu komponentalarning har biri daraxtdir. Yana shuni ham e'tiborga olish kerakki, G_1 va G_2 daraxtlarning har biridagi uchlar soni $k$dan oshmaydi.

Matematik induksiya usuliga ko'ra, bu daraxtlarning har birida qirralar soni uning uchlari sonidan bitta kam bo‘lishini ta’kidlaymiz, ya’ni G_i graf (m_i, n_i)-graf bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinlidir: $n = n_1 + n_2 + 1$, $k + 1 = m_1 + m_2$ va $n_i = m_i - 1$ ($i = 1, 2$). Bu tengliklardan

$$n = n_1 + n_2 + 1 = m_1 - 1 + m_2 - 1 + 1 = (m_1 + m_2) - 1 = (k+1) - 1$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $m = k + 1$ bo‘lganda ham $n = m - 1$ tenglik o‘rinlidir. Bu esa, matematik induksiya usuliga ko‘ra, kerakli tasdiqning isbotlanganligini anglatadi.

Endi daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 2) tasdig‘idan uning 3) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. G graf asiklik, ya’ni u siklga ega bo‘lmagan graf va $n = m - 1$ bo‘lsin. G grafning bog‘lamli bo‘lishini isbotlash kerak.

Agar G graf bog‘lamli bo‘lmasa, u holda uni har bir bog‘lamli komponentasi siklsiz graf G_i (ya’ni, daraxt) bo‘lgan qandaydir k ta ($k > 1$) graflar diz’yunktiv birlashmasi sifatida $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ tenglik bilan ifodalash mumkin. Har bir $i = \overline{1,k}$ uchun G_i graf daraxt bo‘lgani uchun, yuqorida isbotlagan tasdiqqa ko‘ra, agar unda m_i ta uch va n_i ta qirra bo‘lsa, u holda G_i asiklikdir va $n_i = m_i - 1$ tenglik o‘rinlidir. Tushunarliki, $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ va $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Demak,

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} m_i - k = m - k ,$$

ya’ni G graf uchlarining umumiy soni undagi qirralar umumiy sonidan k ta ortiqdir. Bu esa, $k > 1$ bo‘lgani uchun, $n = m - 1$ tenglikka ziddir. Zarur tasdiq isbotlandi.

Teoremaning 3) tasdig‘idan uning 4) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. G – bog‘lamli graf va $n = m - 1$ bo‘lsin. Avvalo k ta bog‘lamlilik komponentalariga ega karrali qirralari bo‘lmagan sirtmoqsiz (m, n)-graf uchun

$$m - k \le n \le \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}$$

munosabat o‘rinli bo‘lishini eslatamiz (ushbu bobning 4- paragrafidagi 7-teoremaga qarang).

$n = m - 1$ bo‘lgani sababli G bog‘lamli grafdan istalgan qirra olib tashlansa, natijada m ta uch va $(m-2)$ ta qirralari bo‘lgan graf hosil bo‘ladiki, bunday graf $m - k \leq n$ shartga binoan bog‘lamli bo‘la olmaydi. Kerakli tasdiq isbotlandi.

Daraxtlar haqidagi asosiy teoremaning 4) tasdig‘idan uning 5) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. G bog‘lamli graf va uning har bir qirrasi ko‘prik bo‘lsin deb faraz qilib, bu grafninng o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtirilishi mumkinligini ko‘rsatamiz. G bog‘lamli graf bo‘lgani uchun, uning istalgan ikkita uchi hech bo‘lmasa bitta oddiy zanjir vositasida tutashtiriladi.

Agar qandaydir ikkita uch bittadan ko‘p, masalan, ikkita turli oddiy zanjir vositasida tutashtirilishi imkoniyati bo‘lsa, u holda bu uchlarning biridan zanjirlarning birortasi bo‘ylab harakatlanib ikkinchi uchga, keyin bu uchdan ikkinchi zanjir bo‘ylab harakatlanib dastlabki uchga qaytish imkoniyati bor bo‘lar edi. Ya’ni qaralayotgan grafda sikl topilar edi.

Tabiiyki, tarkibida sikl mavjud bo‘lgan grafning siklga tegishli istalgan bitta qirrasini olib tashlash uning bog‘lamliligi xossasini o‘zgartirmaydi, ya’ni bu holda grafning siklga tegishli istalgan qirrasi ko‘prik bo‘lmaydi. Bu esa qilingan farazga ziddir. Teoremaning 4) tasdig‘idan uning 5) tasdig‘i kelib chiqishi isbotlandi.

Endi teoremaning 5) tasdig‘idan uning 6) tasdig‘i kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Berilgan G grafninng o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi mumkin bo‘lsin. Teskarisini, yaini G graf asiklik emas deb faraz qilamiz. Bu holda, G da sikl topiladi va undagi ixtiyoriy siklga tegishli istalgan turli ikkita uchni kamida ikkita oddiy zanjir vositasida tutashtirish imkoniyati bor. Bu esa G grafninng o‘zaro ustma-ust tushmaydigan istalgan ikkita uchi faqat bitta oddiy zanjir bilan tutashtirilishi shartiga ziddir.

G grafninng qo‘shni bo‘lmagan v_1 va v_2 uchlarini qirra bilan tutashtirish amalini qo‘llash natijasida faqat bitta siklga ega bo‘lgan graf hosil bo‘lishini ko‘rsatamiz. Shartga binoan qaralayotgan v_1 va v_2 uchlarni faqat bitta oddiy zanjir bilan tutahtirish mumkin. Oddiy zanjir ta’rifiga ko‘ra esa bu zanjir tarkibida sikl yo‘q. Shuning uchun v_1 va v_2 uchlarni G grafninng tarkibida bo‘lmagan (v_1, v_2) qirra bilan tutashtirish, albatta, tarkibida sikl topiladigan va bu sikl yagona bo‘lgan grafni hosil qiladi. Teoremaning 5) tasdig‘idan uning 6) tasdig‘i kelib chiqishi ham isbotlandi.

Nihoyat, 1- teoremaning 6) tasdig‘idagi shartlar baja-rilsa, G grafning daraxt bo‘lishini, ya’ni teoremaning 1) tasdig‘i kelib chiqishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, asiklik G graf bog‘lamli bo‘lmasin. U holda, bu grafning ixtiyoriy bog‘lamli komponentasidagi ixtiyoriy uchni uning boshqa bog‘lamli komponentasidagi ixtiyoriy uch bilan qirra vositasida tutashtirish amalini qo‘llash natijasida tarkibida sikl bo‘lgan graf hosil bo‘lmaydi. Bu esa 6) tasdiqning ikkinchi qismiga ziddir. ■

1- natija. *Bittadan ko‘p uchga ega bo‘lgan istalgan daraxtda hech bo‘lmasa ikkita darajasi birga teng uchlar mavjud.*

Isboti. Haqiqatdan ham, agar $v_1, v_2, ..., v_m$ berilgan daraxtning uchlari bo‘lsa, “ko‘rishishlar” haqidagi lemmaga binoan $\sum_{i=1}^{m} \rho(v_i) = 2(m-1)$ tenglik o‘rinlidir. Daraxtning ta’rifiga ko‘ra, u bog‘lamlidir, shuning uchun $\rho(v_i) \geq 1$ $(i = \overline{1,m})$. Bundan yuqoridagi tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun $\rho(v_1), \rho(v_2), ..., \rho(v_m)$ ketma-ketlikdagi hech bo‘lmaganda ikkita son birga teng bo‘lishi kelib chiqadi. ■