О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Х. Мукумов

Экономико-педагогический университет, Карши, Узбекистан

asqarmuqumov@gmail.com

Аннотация: *В статье с использованием свойств дробных степеней дифференциальных операторов исследуются обобщенные и слабые решения краевой задачи для гиперболических уравнений.*

Ключевые слова: *эллиптический дифференциальный оператор, обобщенное решение, слабое решение, положительный оператор, полугруппа.*

В настоящей работе исследуются краевые задачи для уравнения

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Hu(t), \quad 0 \le t \le T \le \infty,$$

(1)

где $H(x, D)$- эллиптический дифференциальный оператор второго порядка вида

$$H(x,\ D) = -\Delta + q(x).$$

(2)

Здесь функция $q(x)$ действительнозначная функция действительных переменных допускается особенность вида

$$\left|D^{\alpha}q(x)\right| \le \frac{C}{|x|^{1+|\alpha|+\tau}}, \quad 0 \le |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \le n, \ 0 < \tau < 1.$$

(3)

Определение 1. Функция $u(t)$ называется ослабленным решением уравнения (1), если: 1) она непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$ и вторую производную на $(0, T)$; 2) ее значения принадлежат $D(H)$ при $0 < t < T$, а функция $H^{\frac{1}{2}}u(t)$ непрерывна на всем отрезке

$0 \le t \le T$; 3) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) в интервале $(0, T)$.

Определение 2. Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если: 1) она непрерывна на $[0, T]$, имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, а функция $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ имеет непрерывную первую производную на $[0, T]$; 2) значения функции $u(t)$ $(0 < t < T)$ принадлежат $D(H)$ и 3) она удовлетворяет уравнению (1) в интервале $(0, T)$.

Определение 3. Будем говорить, что оператор A, действующий в комплексном банаховом пространстве E, нормально позитивен, если его область определения $D(A)$ плотна в E и если при всех $t \ge 0$ существуют определенные на всем E ограниченные операторы $(A+tI)^{-1}$, причем

$$\left\|(A+tI)^{-1}\right\|_{L_p(R^n)} \le \frac{C}{1+t} \quad (t \ge 0).$$

(4)

Если оператор A позитивный, тогда дробная степень этого оператор определяется по формуле (см. [7])

$$A^{\alpha}x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)} \int_0^{\infty} t^{\alpha}(tI+A)^{-n-1}A^n x dt, \ \ (x \in D(A^n))$$

. (5)

Определение 4. Семейство ограниченных линейных операторов $V(t)$, зависящих от параметра t $(0 < t < \infty)$ называется полугруппой, если

$$V(t_1+t_2) = V(t_1)V(t_2) \quad (0 < t_1,\ t_2 < \infty).$$

Определение 5. Полугруппа $V(t)$ принадлежит классу C_0, если она сильно непрерывна при $t > 0$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{t \to +0} V(t)x = x$ при любом $x \in E.$

В работе получены следующее основные результаты.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \dfrac{n}{2+\tau}$. Тогда

$$\left\|(H+tI)^{-1}\right\|_{L_p(R^n)} \le \frac{C}{1+t} \quad (t \ge 0)$$

(6)

Теорема 2. Пусть $1 < p < \frac{n}{2+\tau}$. Тогда операторы, H^{α} определенные формулами (5), образует сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов.

Отметим, что $A^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором аналитической полугруппу $V(t)$, удовлетворяющей C_0-условию. Если $z_0, W_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$, то функция

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)W_T$$

(7)

является ослабленным решением уравнения (1).

Теорема 3. Всякое обобщенное решение уравнения (1) имеет вид (7), и наоборот, функция (7) является обобщенным решением уравнения (1) при любых $z_0, W_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Для того чтобы обобщенное решение (7) было ослабленным, необходимо и достаточно, чтобы $z_0, W_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Все обобщенные решения уравнения (1) являются аналитическими функциями от t при $0 < t < T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А. Ядра дробного порядка// Мат. сб. 1957. Т.41. № 4. С. 459-480.

2. Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференциальные уравнения. -1972. Т. 8, № 9. -С. 1609-1626.

3. Красносельский М. А., Пустылник Е. И. Использование дробных степеней операторов при изучении рядов Фурье по собственным функциям дифференциальных операторов // ДАН. 1958. Т.122. № 6. С. 459-480.

4. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка// ДАН. 2009. Т.428. № 1. С. 20-22.

5. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустылник П.Е., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966. - 500 с.

6. Muqumov A. H. IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN QO'YILGAN CHEGARAVIY MASALANING KORREKT YECHILISHI //World scientific research journal. – 2023. – Т. 22. – №. 2. – С. 77-80.

7. Д.К.Салаев Х.Х.Имомназаров, А.Э.Холмуродов, А.Х.Мукумов Международная научно-практическая конференция «Рахматулинские чтения» 2023. Стр 61

8. Мукимов А.Х. Имомназаров Х.Х. Одномерная обратная задача определения источника из системы хопфа 2022 QarDU xabarlari Том 3 1 Стр 14