ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

С.Ф. Шарипова[1]

[1] Джизакский филиал Национального Университета Узбекистана

А.Бахриддинова[2]

[2] Джизакский филиал Национального Университета Узбекистана

Аннотация. *В данной работе мы рассматривали нестандартный способ решения уравнений и систем уравнений с помощью векторного метода, применение которого в большинстве школьных учебников не рассматривается.*

Ключевые слова. *Вектор, скалярное произведение, модул вектора, коллинеарность векторов, уравнения, решения.*

Введение

Известный немецкий математик Курант писал: «На протяжении двух с лишним тысячелетий обладание некоторыми, не слишком поверхностными, знаниями в области математики входило необходимой составной частью в интеллектуальный инвентарь каждого образованного человека». И среди этих знаний было умение решать уравнения.

Многие математические задачи допускают несколько вариантов решения. Часто первый избранный бывает далеко не самым удачным. Нахождение наиболее простых, оригинальных путей решения нередко является результатом кропотливой работы. Умение решать задачу различными способами является одним из признаков хорошей математической подготовки.

В данной работе мы рассматривали нестандартный способ решения уравнений и систем уравнений с помощью векторного метода, применение

[1] sadokatsharipova8@gmail.com

[2]

которого в большинстве школьных учебников не рассматривается. Однако векторы могут быть успешно применены не только в геометрии, но и при изучении некоторых вопросов школьной алгебры. Довольно большое число задач существенно упрощается по сравнению с решениями, выполненными традиционным путем, а в некоторых случаях, особенно, когда много переменных, только такой подход и приводит к успеху.

Как мы знаем, величины, которые характеризуются не только *численным значением* (*скаляром*), но и *направлением* называются векторными величинами или просто векторами.

Название вектора произошло от латинского слова vector (везущий, несущий). Геометрическим образом вектора является направленный отрезок. Вектор обозначается двумя заглавными буквами или одной прописной буквой латинского алфавита со стрелкой или черточкой наверху ($\overline{AB}, \vec{a}, \vec{b} \ldots$) Порядок букв обязателен (в данном случае точка A – начало, а B – конец вектора). **Длиной (или модулем) вектора** называют длину отрезка, изображающего его и обозначают $|\vec{a}|$. Ее можно выразить через координаты вектора $\vec{a}$ *(x, y),* то есть $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (или $\vec{a}$ *(x, y, z)*, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Длина любого вектора – число положительное, а длина нулевого вектора равна нулю.

Два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются коллинеарными. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ - коллинеарны, то есть они противонаправлены или сонаправлены. Для коллинеарности вектора $\vec{a}$ ненулевому вектору $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, где $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.Отсюда следует условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ (x_1, y_1) и $\vec{b}$ (x_2, y_2)

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \end{cases}$$

на плоскости: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \quad y_1 = \lambda\, y_2 \quad$ *или* $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

и векторов $\vec{a}\ (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}\ (x_2, y_2, z_2)$

в пространстве $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda\, x_2 \\ y_1 = \lambda\, y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases}$

или $\quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

Сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по правилу треугольника или по правилу параллелограмма. В нашей работе мы воспользуемся правилом треугольника. Найдём сумму векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$: $\quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

В треугольнике ABC имеет место неравенство: $AC \leq AB + BC$ *(неравенство треугольника)*

Но AB=$|\vec{a}|$, BC=$|\vec{b}|$, AC= $|\vec{a} + \vec{b}|$ отсюда получаем векторное неравенство $\quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то есть когда отношения их соответственных координат равны между собой и равны отношению их длин (модулей).

Заметим, что сложение векторов можно производить и в координатной форме, то есть

$\vec{a}\,(x_1, y_1) + \vec{b}\ (x_2, y_2) = \vec{a} + \vec{b}\ (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (на плоскости)

или

$\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1) + \vec{b}\,(x_2, y_2, z_2) = \vec{a} + \vec{b}\ (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ (в пространстве)

Далее вспомним о **<u>скалярном произведении</u>** двух векторов. В общем случае скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, то есть $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. Учитывая то, что $\cos(\vec{a}, \vec{b}) \leq 1$, приходим к известному неравенству о скалярном произведении $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, то есть **<u>скалярное произведение векторов не больше произведения их длин</u>**.

Заметим, что знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$, то есть $\vec{a}, \vec{b} =$ о, и, следовательно, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, значит они коллинеарны. Коллинеарность векторов (а также ее отсутствие) легко переводится на привычные алгебраические соотношения. А именно: коллинеарность векторов равносильна пропорциональности соответственных координат этих векторов. Также скалярное произведение на плоскости векторов $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ можно выразить в координатной форме, а именно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (соответственно в пространстве $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$).

Еще из скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ вытекают соотношения $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b})$,

$$-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Причем, знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны. Значит, сли $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;

если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Как распознать уравнение, которое можно решить векторным методом?

- Если уравнение содержит алгебраическое выражение вида $\sqrt{x^2+y^2}$ или $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ - то это длина некоторого вектора $\vec{a}$(x,y) на плоскости

или $\vec{a}$(x,y,z) в пространстве. Возможны ситуации, как например: $x^2+y^2+z^2=a$, то можно рассматривать вектор $\vec{b}$(x,y,z), длина которого равна $\sqrt{a}$.

- Если уравнение содержит алгебраическое выражение вида $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ ($x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$), то его можно считать скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости (в пространстве).
- Если левую часть уравнения можно представить скалярным произведением некоторых векторов, а правую часть - произведением

их длин.

<u>РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ и СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ</u>

1. Решить уравнение:

$2\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=5$.

Конечно, это уравнение можно решить традиционным способом (например, двойным возведением обеих частей уравнения в квадрат), мы же на примере этого простого уравнения покажем алгоритм применения метода векторов.

Обозначим векторы: $\vec{a}(2;1)$ и $\vec{b}(\sqrt{x+1};\sqrt{4-x})$. Тогда $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$|\vec{b}|=\sqrt{x+1+4-x}=\sqrt{5}$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,\vec{b}=2\bullet\sqrt{x+1}+1\bullet\sqrt{4-x}=5$ (по условию)

и $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ = $\sqrt{5}\bullet\sqrt{5}$ $\cos\varphi=5\cos\varphi$. Приравниваем правые части, получаем: 5 $\cos\varphi=5$, откуда $\cos 0=1$, т.е $\varphi=0$, значит векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, значит их одноимённые координаты пропорциональны:

$\frac{2}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$; или $2\sqrt{x+1}=\sqrt{4-x}$, отсюда, после возведения в квадрат, получаем:4(x+1)=4-x, 4x+4=4- x, 5x=15, x=3. Сделав проверку, убеждаемся, что x=3 – корень уравнения.

2. Решить уравнение с двумя неизвестными:

$\sqrt{x}+\sqrt{2-y}\sqrt{3+2x}+\sqrt{6+y}\sqrt{6-3x}=9$

Обозначим векторы: $\vec{a}(1;\sqrt{2-y};\sqrt{6+y});\vec{b}(\sqrt{x};\sqrt{3+x};\sqrt{6-3x})$. Найдём длины этих векторов: $|\vec{a}|=\sqrt{1+2-y+6+y}=\sqrt{9}=3$; $|\vec{b}|=\sqrt{x+3+2x+6-3x}=\sqrt{9}=3$

Запишем скалярное произведение этих векторов:

$\vec{a}\,\vec{b}=1\bullet\sqrt{x}+\sqrt{2-y}\sqrt{3+2x}+\sqrt{6+y}\sqrt{6-3x}=9$; и $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=3\bullet3\bullet\cos\varphi$

Получили, что 9 $\cos\varphi$=9, отсюда $\cos\varphi$=1, φ=0, значит векторы коллинеарны,значит их одноимённые координаты пропорциональны:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{3+2x}}=\frac{\sqrt{6+y}}{\sqrt{6-3x}};$$

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{3+2x}}\\ \frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{6+y}}{\sqrt{6-3x}}\end{cases}\quad\begin{cases}3+2x=x(2-y)\\ 6-3x=x(6+y)\end{cases}\quad\begin{cases}xy=-3\\ 6-9x=xy\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-3\\ x=1\end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что (1; - 3) – решение уравнения.

3.Решить уравнение

$2\sqrt{1-2x}-x\sqrt{2x+9}=\sqrt{10(x^2+4)}$

ОДЗ: $\begin{cases} 1-2x \geq 0; \\ 2x+9 \geq 0. \end{cases}$

$4{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ или $x \in [-4{,}5 ; 0{,}5]$

Если попробовать возвести в квадрат, то придём к виду:

$4(1-2x) + x^2(2x+9) - 10(x^2+4) = 4x\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{2x+9}$,

$2x^3 - x^2 - 8x - 36 = 4x\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{2x+9}$.

Возводя еще раз мы придем к многочлену, где будет и x^6, и x^5 и т.д. т.е явно задача намного усложнилась.

Попробуем использовать векторный метод

введем векторы $\vec{a}\,(\sqrt{1-2x}\,;\sqrt{2x+9})$ $\vec{b}\,(2;-x)$

находим их скалярное произведение

$\vec{a}\,\vec{b} = 2\sqrt{1-2x} - x\sqrt{2x+9} = \sqrt{10(x^2+4)}$ (по условию)

вычислим длины $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и их произведение

$|\vec{a}| = \sqrt{1-2x+2x+9} = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2+(-x)^2} = \sqrt{4+x^2}$;

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \sqrt{10}\cdot\sqrt{4+x^2} = \sqrt{10(x^2+4)}$.

Получили: $\cdot\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, то есть $\cos\varphi=1$, $\varphi=0$, значит векторы коллинеарны,значит их одноимённые координаты пропорциональны:

7

$$\frac{\sqrt{1-2x}}{2} = \frac{\sqrt{2x+9}}{-x} \Rightarrow x^2(1-2x) = 4(2x+9),$$

$2x^3 - x^2 + 8x + 36 = 0$. Первый корень найдём подбором: $x = -2$.Далее по схеме Горнера:

	2	-1	8	36
-2	2	-5	18	0

уравнение $2x^2 - 5x + 18 = 0$ не имеет решений, т.к. $D < 0$.

$x = -2$ удовлетворяет ОДЗ

<u>Ответ</u>: -2

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+y-2} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

ОДЗ: $y \geq 1$ и $x \geq 1$. Введем векторы $\vec{a}$(x,y), $\vec{b}$ ($\sqrt{y-1}$; $\sqrt{x-1}$).Левая часть первого уравнения системы является скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е $\vec{a}\,\vec{b}=x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1}$ Определим длины этих векторов и их произведения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{x+y-2}\ ; \quad |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x+y-2}.$$

Из второго неравенства системы $2=\sqrt{x^2+y^2}$, тогда $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=2\sqrt{x+y-2}$.

Получили: $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Известно, что знак равенства в векторном неравенстве $\vec{a}\,\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ достигается тогда, когда векторы коллинеарны, т.е:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y-1}} = \dfrac{y}{\sqrt{x-1}} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{т.е} \quad x = y = \sqrt{2}$$

<u>Ответ</u>: $(\sqrt{2};\sqrt{2})$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 = 1 \\ x - 5y + z = \dfrac{7}{6} \end{cases}$$

Если представить первое уравнение системы в виде: $(2x)^2 + (5y)^2 + (3z)^2 = 1$, то получим сумму квадратов трёх чисел, а значит эту сумму можно представить как квадрат длины вектора, координаты которого и есть эти числа, т.е $\vec{a}$(2x; 5y; 3z) Теперь определим, какие координаты $(b_1;b_2;b_3)$ должны быть у вектора $\vec{b}$. Явно, левая часть второго уравнения не может быть представлена как квадрат длины второго вектора, попробуем её представить в виде скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, , т.е $\vec{a}\,\vec{b}$ = 2xb_1 +5yb_2 +3zb_3

И $\vec{a}\,\vec{b}$ = x– 5y + z $= \frac{7}{6}$, тогда 2b_1=1; 5b_2=-5; 3b_3=1, отсюда координаты вектора $\vec{b}\,(\frac{1}{2};-1;\frac{1}{3})$. Длина вектора $|\vec{b}| = \sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = 1\cdot\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$ и $\vec{a}\,\vec{b} = \frac{7}{6}$. Таким образом $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, вектора коллинеарны, их координаты пропорцинальны

$\frac{2x}{\frac{1}{2}} = \frac{5y}{-1} = \frac{3z}{\frac{1}{3}}$, т.е. 4x = -5y = 9z , откуда y= - $\frac{4x}{5}$, z=$\frac{4x}{9}$.

Эти значения подставляем во второе уравнение системы

<u>Ответ</u>: $(\frac{3}{14};\ -\frac{6}{35};\ \frac{2}{21})$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \ldots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\cdot\sqrt{1+\frac{1}{100}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \ldots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\cdot\sqrt{1-\frac{1}{100}} \end{cases}$$

У первого уравнения 100 слагаемых и их сумма равна $100\cdot\sqrt{1+\frac{1}{100}}$.

Значит все слагаемые равны и $\sqrt{1+x} = \sqrt{1+\frac{1}{100}}$. У второго уравнения также 100 слагаемых, и их сумма равна $100\cdot\sqrt{1-\frac{1}{100}}$, значит все слагаемые равны и $\sqrt{1-x} = \sqrt{1-\frac{1}{100}}$. Решая систему их двух уравнений, найдём x:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} = \sqrt{1+\frac{1}{100}} \\ \sqrt{1-x} = \sqrt{1-\frac{1}{100}} \end{cases} \quad \begin{cases} 1+x = 1+\frac{1}{100} \\ 1-x = 1-\frac{1}{100} \end{cases} \quad \text{т.е } 2x = \frac{2}{100};\ x = \frac{1}{100}$$

Докажем, что данный корень единственный. Попробуем это сделать с помощью векторного метода. По условию n = 1, 2, …,100. Рассмотрим вектор $\vec{a}_n = (\sqrt{1+x_n}\,;\sqrt{1-x_n})$. Длина каждого из векторов равна $\sqrt{1+x_n+1-x_n} = \sqrt{2}$.

Пусть $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_{100}=\vec{A}$ По правилу сложения векторов и условия задания, вектор $\vec{A}$ имеет координаты $(100\cdot\sqrt{1+\frac{1}{100}}\;;100\cdot\sqrt{1-\frac{1}{100}})$. Длина $|\vec{A}| = \sqrt{10000(1+\frac{1}{100})+10000(1-\frac{1}{100})} = \sqrt{10000+100+10000-100} = \sqrt{20000} = 100\sqrt{2}$.

Получили, что $|a_1+a_2+\ldots+a_{100}| = |a_1| + |a_2| +\ldots+|a_{100}|$ Поэтому эти векторы коллинеарны (сонаправлены). А так как их длины равны, то они равны между собой. Поэтому $x_1 = x_2 =\ldots= x_{100} = \frac{1}{100}$.

Заключение

Примененный нами векторный метод показывает новый, нетрадиционный подход к решению уравнений, что решение довольно большого числа примеров на решение уравнений и систем уравнений существенно упрощается по сравнению с решениями, выполненными традиционным путем, а в некоторых случаях, особенно, когда много переменных, только такой подход и приводит к успеху. Кроме того, векторы позволяют «сжать» информацию, сделать ее наглядной и оперативной, и тем самым способствуют поиску путей решения математических заданий.

Список литературы

1. Гальперин И.М, Габович И.Г «Использование векторного неравенства Коши-Буняковского для решения задач по алгебре» М.,«Педагогика» Математика в школе №2 1991г.

2. С.А.Литвинова и др. «За страницами учебника математики» Издательство «Панорама» 2006

3. В.И.Рыжик «25000 уроков математики», М., Просвещение, 1993г.

4. Sadoqat, Sharipova. "METHODS FOR SOLVING PARAMETRIC EQUATIONS AND INEQUALITIES." PEDAGOGS jurnali 10.2 (2022): 210-

221.

5. Sharipov, Xurshid, and Sadoqat Sharipova. "ORBITS ARE A FAMILY OF VECTOR FIELDS AND A HYPERBOLIC PARABOLOID." International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research 1.2 (2023): 50-57.

6. Fazliddinovna S. S. et al. KARRALI INTEGRALLARNI HISOBLASHNING GEOMETRIK USULI //Conferencea. – 2022. – C. 76-79.

7. Sadoqat, Sharipova. "CHIZIQLI FAZODA TURLI BAZISLARDA VEKTOR KOORDINATALARI ORASIDAGI BOG ‘LIQLIK." International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research (2023): 336-340.