ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИДЕАЛАХ

Guliston Davlat Unversiteti Matematika kafedrasi o'qituvchisi

Saitmuratov O'lmasbek Nurullo o'g'li.

Guliston Davlat Unversiteti Matematika yo'nalishi

4-bosqich talabasi ***To'raqulov Asadbek.***

Аннотация: *Ета статья теорема Гильберта о полиномиальных идеалах. Есть несколько доказательств алгебры, основанных на теореме Гилберта. Гильберт положил в основу доказательства основных теорем теории инвариантов общее предложение относительно полиномиальных идеалов, являющееся одним из простейших и важнейших во всей алгебре.*

Ключевые слова: *поле к , кольца* R*, ковариантную, абсолютные инварианты,*

Гильберт положил в основу доказательства основных теорем теории инвариантов общее предложение относительно полиномиальных идеалов, являющееся одним из простейших и важнейших во всей алгебре. Рассмотрим кольцо R, *в котором каждый идеал имеет конечный базис*. Примерами таких колец могут служить поле k или кольцо обыкновенных целых чисел. Теорема Гильберта утверждает, что это свойство не теряется при присоединении неизвестной.

Теорема *(А).* Если каждый идеал в кольце R имеет конечный базис, то это же верно и для кольца $R|x|$.

В этой модернизированной обобщенной форме предложение Гильберта сразу подсказывает и те шаги, которые следует предпринять для его доказательства. За самим доказательством **я** отошлю читателя к „Современной алгебре" ван дер Вардена. Повторное применение распространяет эту теорему на кольцо $R[x_1 \dots, x_n]$ полиномов над R от любого числа неизвестных $x_1 \dots, x_n$. Специализируя R либо как поле k, либо как кольцо всех обыкновенных целых чисел, получаем два предложения, сформулированных самим Гильбертом

Теорема (B). *Если* k *— поле, то каждый идеал в кольце* $k[x_1 \dots, x_n]$ *имеет конечный базис. То же остается верным, если заменить к кольцом обыкновенных целых чисел.*

Возьмем любое множество $\xi = \{\alpha\}$ чисел α из кольца R, обладающего тем свойством, что каждый идеал в нем имеет конечный базис. Совокупность всех чисел вида

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots, \quad (1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — любая конечная последовательность элементов из ξ, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ —произвольные элементы из R, представляет собой идеал (ξ), наименьший идеал, содержащий множество ξ. Определив в (ξ) конечный базис и выразив каждый из его элементов в форме (1), получим конечное множество чисел $a_1\ a_2, \dots, a_h$ из (ξ) такое, что каждое число из ξ будет иметь вид

$$\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_h\boldsymbol{\alpha}_h \qquad (\boldsymbol{\lambda}_h \in R)$$

(Однако» поскольку ξ не предполагается идеалом, вовсе не обязательно, чтобы, обратно, каждое число этого вида принадлежало ξ.)

Доказательство первой основной теоремы для $GL(n)$

Классическая теория инвариантов имеет дело с группой GL(n) и рассматривает произвольную (ковариантную) форму u заданной степени r, зависящую от контравариантного вектора ξ; мы будем записывать такую форму в виде

$$\boldsymbol{u} = \sum \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} \boldsymbol{u}_{r_1 \dots r_n} \xi_1^{r_1} \dots \xi_n^{r_n} \quad (r_1 + \dots + r_n = r) \qquad (2)$$

Для простоты рассмотрим инварианты *J(u),* зависящие от **одной** переменной формы (1.1) заданной степени г. В **кольце** $k\ [u]$ **всех** полиномов, зависящих **от** переменных коэффициентов $u_{r_1 \ldots\ r_n}$, мы рассмотрим множество ξ , *состоящее из всех инвариантов J(u), не сводящихся к постоянной* (исключить **пос**тоянные весьма важно). Согласно заключительному замечанию предыдущего параграфа, выделим конечное число инвариантов

$$J_1(u),\ \ldots,\ J_h(u)$$

не сводящихся к постоянной и таких, что каждый не сводящийся к постоянной инвариант *J(u)* будет линейной их комбинацией

$$J(u) = L_1(u)\ J_1(u) + \ldots + L_h(u) J_h(u) \quad (3)$$

с полиномиальными коэффициентами $L_i\,(u)$ Предположим, что $J_1; J_2$,, .,. , J_h однородны, степеней μ ; $\mu_1, \mu_2 \ldots.\ \mu_h$. Равенство (3) не нарушится, если вычеркнуть в $L_i\,(u)$ все члены, степень которых отлична от $\mu - \mu_1$, так что мы можем считать коэффициенты в $L_i(u)$ однородными, „правильных" степеней $\mu - \mu_1$. (Тогда при $\mu_1 > \mu$ коэффициент $L_i(u)$ будет нулем.)

Этот первый шаг имеет общую значимость и вовсе не ограничивается классическим случаем. Теперь мы попытаемся показать, что *только что определенные инварианты $J_i(u)$ образуют целый рациональный базис для всех инвариантов.* Этот *второй,* шаг будет специфичен для группы *GL(n).* Воспользуемся тем же приемом, который послужил для доказательства теоремы Грама. Подставим вместо $u_{r_1 \ldots\ r_n}$ в соотношение (3) абсолютные ковариаты

$$u^*_{r_1 \ldots\ r_n}\,(\eta^1, \ldots.\ \eta^n),\ (4)$$

определенные формулой

$$u(t_1\eta^1 + \cdots + t_1\eta^n) = \sum \frac{r!}{r_1! \ldots r_n!} t_1^{r_1} \ldots\ t_n^{r_n}\ u^*_{r_1 \ldots\ r_n}\,(\eta^1, \ldots.\ \eta^n)$$

Для инварианта *J(u)* веса g мы имеем

$J(u^*) = H^g \cdot J(u)$

Где ***H*** *обозначает определитель* $[\eta^1, \ldots. \; \eta^n]$. Поэтому

$$H^g \cdot J(u) = L_1 (u^*) \bullet H^{g_1} J_1(u) + \ldots + L_h (u^*) \bullet H^{g_h} J_h(u) \quad (5)$$

H есть ковариант веса —1; следовательно, множители $H^{g_i} Li\,(u^*)$ суть коварианты веса —g_i. Ω-процесс Кэли

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta_1^1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \eta_n^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial \eta_1^n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \eta_n^n} \end{vmatrix}$$

превращает ковариант веса g^*, зависящий от *п* контра вариантных векторов $\eta^1, \ldots. \; \eta^n$, в ковариант веса $g^* + 1$. Следовательно, подвергнув (5) g раз Ω -процессу, мы получим в результате соотношение

$$c_g \bullet J(u) = L^*_1 (u) J_1(u) + \ldots + L^*_h (u) \bullet J_h(u) \quad (6)$$

где c_g есть постоянная

$c_g = \Omega^g (H^g)$,

$L^*_i (u) = \Omega^g \{ H^{g_i} L_i (u^*) \}$,

суть коварианты веса g—g_i, или, лучше, поскольку они уже не содержат переменных $\eta^1, \ldots. \; \eta^n$, — *инварианты* этого веса. Скоро мы убедимся в том, что $c_g \neq 0$. Считая это важное обстоятельство уже доказанным, мы делим (6) на c_g и в результате приходим к такой нормировке коэффициентов $L_i(u)$ в (3), при которой они становятся *инвариантами.*

Утверждение, что каждый инвариант *J(u)* степени ji выражается через инварианты $J_i(u)$, доказывается теперь индукцией по μ. Это утверждение тривиально для $\mu = 0$, когда *J(u)* есть постоянная. Так как каждый из инвариантов J_i $\{u)$, по крайней мере, — степени 1, то *инвариантные* коэффициенты L_i $\{u)$ в (3), только что полученные нами с помощью Ω - процесса, будут степени, *низшей* чем μ ; а если они выражаются через инварианты J_i (u), то это же верно и для $J(u)$.

Чтобы показать, что $c_g \neq 0$, заметим, что H^g есть форма с целыми коэффициентами от переменных η_k^i и что Ω —точно такая же форма от дифференциальных операторов$\frac{\partial}{\partial \eta_k^i}$. Но если

$$f(x_1, \ldots x_r) = \sum a\,(i_1, \ldots i_r)\; x_1^{i_1}\; . \; . \; . x_r^{i_r}, \quad (i_1 + \ldots + i_r = s)$$

— любая форма степени s, и

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\; \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sum a\,(i_1, \ldots i_r) \frac{\partial^g}{\partial x_1^{i_1}\; . \; . \; .\partial x_r^{i_r}}\;,$$

to, как показывает простое вычисление,

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\; \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f\,(x_1, \ldots . x_r) = \sum i_1! \ldots\; i_r!\; a^2(i_1 + \ldots + i_r).$$

Отсюда следует, что c_g в действительности есть *положительное целое число.*

Рассматривая инварианты J, зависящие от нескольких обобщенных величин u, v, ... , мы можем без какого бы то ни было ограничения общности считать, что сигнатуры $(r, \ldots . r_n)$ этих обобщенных величин удовлетворяют условию $r_n \geq 0$. Из доказательства обобщенной теоремы Грама ясно тогда, как ввести аналог ковариантов (4). Суммируем:

Теорема (А). *Относительные инварианты для полной линейной группы* GL{n), *т.* е. *абсолютные инварианты для* SL(n), *зависящие от нескольких обобщенных величин u, v, ... , обладают конечным целым рациональным базисом.*

Вторая основная теорема содержится в следующем общем алгебраическом утверждении:

Т е о р е м а (В). *Все соотношения, связывающие заданные полиномы, являются алгебраическими следствиями конечного числа таких соотношений*.

Действительно, если

$J_1 (z_1, ...z_i)= J_1(z), ... J_p(z)$

— заданные полиномы от любого числа неизвестных $z_1, ...z_i$ то соотношение есть такой полином $R(t_1 ... , t_p)$ от p независимых переменных t_i , что

$R(J_1(z),...J_p(z))= 0$.

Соотношения, очевидно, образуют в кольце полиномов идеал, и этот идеал имеет конечный базис .

Поле k в котором мы оперируем, всюду здесь может быть любым полем характеристики 0.

Литература.

1. Дьедоне Ж. Керрол Дж. Мамфорд Д.«Геометрическая теория инвариантов ». М. Мир.1974.

2.Спрингер Т. «Теория инвариантов» М.Мир. 1981.

3. Вейль Г. «Классические группы, их инвариантны и представления». М.Ил.1947.

4. https://ziyonet.uz

5. https://GulDU.uz