ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

Город Самарканд, школа №42 учитель математика

Ибодова Шоира Гулмуродовна

Аннотация. Обеспечение независимости Республики Узбекистан связано с осуществлением высоких преобразований в экономической, социальной и культурной сферах. Это связано с профессиональными знаниями специалистов, подлежащих перевоспитанию, высокой стоимостью, требует духовной зрелости и широкого мировоззрения. Исходя из этих требований и устремлений, подготовка руководящего персонала стала одной из важнейших задач сегодняшнего дня.

Ключевые слова: модель, моделирование, обобщение, наглядно-образное мышление, понятийное мышление

В статье рассматривается вопрос о неразрывной связи геометрии с наглядными представлениями, которые, выступая в наглядной форме, включают в себя конкретные признаки единичной мысли в форме единичного. Указывается, что представление, будучи в известной мере заместителем и представителем общего, всѐ же не может выразить это общее вполне адекватно, в связи с чем между наглядно-чувственной, единичной формой и развивающимся в нѐм общим представлением возникает глубокое противоречие, которое не может быть разрешено в рамках наглядности, неизбежно присущей образу. Отмечается, что решение указанного противоречия исторически и гносеологически происходит путѐм образования понятия. В развитии человечества в целом и в развитии ребѐнка, в частности, наступает такой момент, когда происходит качественный скачок, подготовленный развитием наглядно-образного мышления и детерминированный потребностями и интересами практической деятельности (общества и индивида), перехода от ограниченных рамок наглядно-образного мышления к области понятийного мышления, создающего неограниченные возможности познания и освоения действительности. На основе изученного материала делается вывод, что при изучении курса геометрии в общеобразовательной школе необходимо, чтобы учащиеся в первую очередь осознали модельный характер геометрии, специфику моделей, понятий геометрии и особый характер отображения действительности, пространственных свойств видимого мира в этих понятиях-моделях, модельный характер которых, к сожалению, в школе обычно не вскрывается и учащимися не осознаѐтся.

Наиболее характерной чертой современного взгляда на науку и, в частности, на геометрию, является осознание модельного характера науки. Модельный характер современной науки в настоящее время достаточно изучен, проблеме моделирования в науке, моделированию, как методу научного познания, посвящена огромная литература, и хотя, конечно, многие вопросы этой проблемы являются до сих пор дискуссионными, однако исключительная роль и значение моделирования в научном познании всеми признается. Любая современная наука представляет собой систему различного рода моделей. В естественных науках особе место занимают математические модели, т.е. модели, сконструированные с помощью математического языка и функционирующие в соответствии с законами этого языка. «Наука,- пишет Н.Н. Моисеев,- только и может иметь дело с моделями, с приближенным описанием действительности, отражающим те или иные стороны реального. Математическая модель ” это лишь специальный способ описания, позволяющий для анализа использовать формально-логический аппарат математики. Изучение математических моделей ” это основной метод познания, используемый в естественных науках (6, 5). Каждая наука обычно решает три основные задачи:

1) конструирует разного рода модели тех объектов, явлений и процессов, которые служат предметом этой науки;

2) разрабатывает методы исследования этих моделей, для чего создает особый аппарат науки;

3) разрабатывает методику применения результатов исследования этих моделей на практике для решения возникающих задач и проблем своей области изучение действительности. Все эти положения становятся более понятными при

анализе развития геометрии как науки. Анализ развития геометрии, так же, как и других наук, может быть произведен с различных точек зрения. Предметно-психологический анализ предполагает рассмотрение геометрии с точки зрения её генеза как науки Такой анализ заключается в том, что изучаемое явление или объект рассматривается в его возникновении и развитии. Методология предполагает историзм познания, который органически присущ диалектико-материалистическому взгляду на мир. К. Маркс говорил: «Мы знаем только одну единственную науку, науку истории. Историю можно рассматривать с двух сторон, ее можно разделить на историю природы и историю людей» (10,16). Анализ развития геометрии как науки показывает, что геометрические понятия формировались на протяжении истории так, что первоначально геометрические фигуры были абстракцией формы видимых тел. Еще в глубокой древности было найдено множество эмпирических сведений и результатов, относящихся к измерению площадей и объемов фигур и НОМ тел. На первых порах эти сведения не были связаны друг с другом и поэтому не могли составлять науку. По мере того как они очищались от случайностей и ошибок, стали выявляться логические связи между ними. Многие из результатов, полученные в начале эмпирически, стало возможным выводить логически из некоторых других результатов. В геометрии Евклида этот этап развития геометрии получил окончательное оформление, но все же это была геометрия лишь видимого пространства. Главное, что характерно для аксиоматики Евклида, - это ее конкретный, содержательный характер, поскольку основные понятия и постулаты предполагают только единственную интерпретацию. Под точкой прямой и плоскостью, как основными понятиями геометрии, подразумевались интуитивно хорошо известные нам из повседневного опыта пространственные образы (например, прямая линия представлялась в виде тонкой натянутой нити, плоскость ” как идеально ровная поверхность и т. д.). Сведя доказательство теорем геометрии к немногим исходным утверждениям (аксиомам и постулатам), Евклид тем самым поставил их истинность в зависимости от истинности основных утверждений. Если эти утверждения остаются у него недоказанными, то только потому, что их истинность предполагается самоочевидной. Дальнейшее развитие науки поколебало, однако, веру как в существование единственно возможной геометрии, так и в безупречность евклидового способа ее обоснования. На этой стадии развития геометрии особую роль сыграл V постулат о параллельных прямых. Постепенно стало ясно, что отрицание V постулата влечет за собой целый ряд невероятных, парадоксальных следствий (с точки зрения физического видимого пространства), в которых никак не удавалось усмотреть прямого противоречия. Так, Н.И. Лобачевский вначале пытался вслед за другими математиками (Саккери, Лежандр и др.) вывести постулат Евклида о единственной параллели к данной прямой из остальных постулатов. Потерпев неудачу, он делает вывод недоказуемости пятого постулата и, следовательно, его независимости от других аксиом. Но если постулат независим, значит он может быть заменен. Чем? В процессе выведения постулата из других положений Лобачевский, естественно, использовал метод доказательства от противного. То есть он допустил существование бесконечного множества прямых, проходящих через данную точку и не пересекающих данную прямую. Проводя эти построения, Лобачевский не встретил противоречий. Так родилась идея новой «воображаемой» геометрии, опирающейся на все прежние аксиомы, кроме одной, замененной на противоположную. Открытие неевклидовой геометрии наглядно продемонстрировало возможность существования различных геометрических систем, отличных от Евклидовой. В связи с этим существенно изменились взгляды как на природу аксиом геометрии, так и на понимание сущности геометрического пространства. Исходные понятия, аксиомы геометрии Евклида допускают только одну интерпретацию: они идеализируют наши интуитивные представления об окружающем нас физическом пространстве. Постепенно, однако, выяснилось, что этим аксиомам удовлетворяют и многие другие системы объектов, весьма далѐкие от предметов физического пространства. Так, например, под точкой можно понимать шар заданного диаметра, под прямой ” бесконечный круглый цилиндр с такими же диаметром сечения, под плоскостью ” слой пространства между двумя плоскими поверхностями, стоящими друг от друга на расстоянии, равном диаметру шара и т. д. (5,109-124). Ещѐ более интересной является аналитическая интерпретация аксиом геометрии. Если ограничиваться планиметрией, то под точкой можно подразумевать пару вещественных чисел (X, Y), под прямой ” отношения трех чисел а:в:с где а 2+b 2 0 и т.д. Нетрудно показать, что все аксиомы Евклидовой геометрии выполняются для указанных выше систем объектов [8, с.271]. Эти примеры показывают, что аксиомы Евклидовой геометрии не обязательно связывались с теми конкретными пространственными образами, которые Евклид сознательно положил в основу своей геометрии. Указанным аксиомам могут удовлетворять самые различные системы объектов, причем не только негеометрической, но даже нематематической природы. В качестве примера такой нематематической интерпретации может служить теория многообразия цветовых ощущений, разработанная немецким математиком Г. Грассманом. Впоследствии геометрический метод в цветоведении успешно применялся Г. Гельмгольцем и Д.К. Максвеллом. Мы видим, таким образом, что рассмотрение основных понятий и аксиом геометрии как форм, допускающих различные конкретные интерпретации, дает возможность, во-первых, значительно расширить применение геометрических методов исследования, вовторых, позволяет развить саму геометрию во всей ее общности. Недостаток евклидовского подхода как раз и состоял в том, что он связывал геометрию только с одной из возможных ее интерпретаций, а это неизбежно вело к потере общности теории. Такой абстрактный взгляд на геометрию был подготовлен в результате многочисленных исследований, предпринятых после открытия неевклидовых геометрий. Еще в 1844 г. Г.Грассман ясно выразил мысль о необходимости отделения геометрии как части математики от геометрии как учения о свойствах реального пространства. Эти идеи нашли свое дальнейшее развитие в «Лекциях по новой геометрии» М. Паша (1882 г.), в которых он подчеркивает, что геометрическая дедукция должна быть независимой от значения геометрических понятий, так как она независима от чертежей. В «Принципах геометрии» известного итальянского математика Д. Пеано основные элементы геометрии рассматриваются как «вещи», которые могут иметь самое различное значение. В наиболее совершенной форме этот взгляд нашел выражение в известной книге Д. Гильберта «Основания геометрии», впервые опубликованной в 1899 г. В отличие от Евклида Гильберт не связывает с основными понятиями и аксиомами геометрии какое-либо конкретное истолкование. «Мы мыслим, - пишет Д.Гильберт, - три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем точками и обозначаем A, B, C, . . , вещи второй системы мы называем прямыми и обозначаем a, b, c…, вещи третьей системы мы называем плоскостями и обозначаем α, β, γ, …» (2,56). Отсюда ясно, что основные понятия и аксиомы в системе Гильберта имеют более абстрактный характер, чем в системе Евклида. Действительно, аксиомы Евклида являются прямыми абстракциями от конкретных пространственных объектов. Основные же понятия и аксиомы Гильберта абстрагируют от пространственного содержания, и поэтому могут описывать свойства непространственных объектов. Так как в современной геометрии аксиомы абстрагируются от пространственного содержания, а истинность теорем находится в прямой зависимости от истинности аксиом, то первое, что мы должны сделать - это рассмотреть вопрос об условиях истинности аксиом и способах ее установления. Вопрос об истинности аксиом решался по-разному на разных этапах развития аксиоматического метода. Первоначально, когда аксиомам приписывали единственную интерпретацию, их истинность считалась самоочевидной. Такой взгляд на аксиомы как на самоочевидные утверждения и в настоящее время имеет широкое распространение среди людей, мало знакомых с математикой. В школьном преподавании также нередко приходится сталкиваться с таким пониманием аксиом. Такой взгляд на аксиомы и тем более на математические истины вообще не выдерживает критики. Во-первых, часто доказывается теорема, которая является более очевидной, чем аксиома. Например, теорема о том, что перпендикуляр короче наклонной, интуитивно более ясна, чем, например, аксиома о параллельных. Во-вторых, существует немало математических истин, в том числе и аксиом, которые противоречат нашей интуиции и чувству очевидности, например, аксиома Н.И. Лобачевского. Если аксиомы нельзя считать самоочевидными утверждениями, то их истинность должна быть доказана опытным практическим путем. Но здесь возникает ряд трудностей, связанных с абстрактным характером объектов математики. Во-первых, аксиомы математики представляют не непосредственные обобщения данных эмпирического опыта, а включают ряд ступеней абстракции и идеализации. Естественно, потому, что их содержание нельзя прямо сопоставить с результатами наблюдение и опытов. Вовторых, существует различные системы аксиом, которые описывают свойства одних и тех же реальных объектов. В-третьих, любое доказательство, любое доказательство теоремы в любой из аксиоматических систем может решаться лишь чисто логико-математическими методами. Но это одна сторона проблемы математической истины, и при том не самая главная. Формальные системы создаются для изучения реального мира, и поэтому мы должны знать, в какой степени они приспособлены для его изучения. Поскольку математические понятия и утверждения являются абстракциями, то бессмысленно ставить вопрос о точном соответствии аксиом опытным данным. В процессе абстракции всегда происходит огрубление действительности, отвлечение от ряда обстоятельств. Как указывает академик А.Н.Колмогоров, чисто математический подход ‚не устраняет вопроса о том, какая из логически мыслимых (непротиворичивых) систем геометрии осуществляется в ‚ физическом‛ простронстве, в котором мы живем и действуем‛ [4, с.90]. Но для этого мы должны дать определенную физическую интерпретацию аксиомам системы и, следовательно, должны выйти за пределы чистой математики и по существу дела заняться исследованием физических гипотез. А поскольку возможны различные интерпретации аксиом, то ответ на поставленный вопрос теряет полную однозначность. Особенно важно отметить, что с помощью аксиоматического метода становится возможным более глубже понять объект исследования математики, установить связь, существующую не только внутри отдельных математических теорий, но и всей математики в целом. Рассмотрение различных математических структур под углом зрения аксиоматического метода, помогает составить общее представление о математике как единой науке, способствует уяснению ее сущности. Как уже отмечалось, наука, поднявшаяся до глубоких обобщений, оперирует непосредственно не с предметами внешного мира, а с их абстрактными отображениями. Поэтому объекты науки (поскольку она обрела теоретический характер) ” в двойном подчинении. С одной стороны, будучи элементами известной научной теории, они связаны с языком данной теории. В рамках последнего они находятся в определенном отношении друг к другу, образуя систему зависимостей в контексте внутритеорического языка. Одновременно, будучи идеализацией, упрощение известных явлений действительности, объекты науки детерминированы извне. Эта их обусловленность реальным миром требует описания уже на другом языке - ,внешнем‛, образующем иной, ,внешний‛ мир. Характеризуя эту особенность, Ф.Энгельс писал: ,Чистая математика имеет своим объектом простанственные формы и количественные отношения действительного мира... Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это в стороне, как нечто безразличное...‛ (, 37). Так создается особый мир, особая математическая реальность со своими внутренними отношениями. Описывая эти отношения, выясняя связи, в которые вступают объекты, мы находимся в границах ,внутренного‛ языка и не должны вносить сюда ,внешних‛ вопросов. Насколько ,внешний‛ язык может отрицательно влиять при решении внутриматематических проблем, демонстрирует опыт и номинализма, и реализма. Так, номиналисты, справедливо отмечая, что множество, числа и т.п. не существуют в окружающем нас мире наподобие материальных тел, переносят это ,внешнее‛ отрицание и на область внутриматематического языка.В связи с этим они вынуждены проводить номиналистическую реинтерпретацию, то есть замену математических выражений, включающих термины ,множество‛,,число‛ и т.п., соотвествующими описаниями, позволяющими избежать употребления подобных терминов. Сказанное и на известных отрезках развития математики ,внешние‛ проблемы оказывают даже очень большое влияние на ее прогресс. Следовательно, ,внешний‛ язык также важен для математики, но стоит позаботиться по крайней мере о двух вещах: во-первых, чтобы им был язык материалистической философии, а, во-вторых, научиться четко определять сферу его применения.

Поскольку математика оперирует с абстракциями высших порядков, для которых в природе нет прямых корреляторов, и связь с нею оказывается весьма опосредствованной, приходится работать с объектами особого рода ” символами. Математическая абстракция, как уже отмечалось, отвлечена от всех природных свойств, оставлены лишь отношения. Именно поэтому обозначающие объекты ” символы не несут никаких вещественных характеристик, иначе это мешало бы математику ставить символы в определенные отношения, затрудняло бы операции с ними. Д. Гильберт подчеркивал, что нам нет нужды знать, каковы характеристики точки, линии, плоскости в качестве математической реальности, было бы даже прискорбно, если бы мы пытались это узнать. Поэтому, оперируя с символами, математик должен забыть о их семантике и рассматривать их как самостоятельную реальность. Таким образом, произведенный анализ позволяет сделать следующие выводы: 1.Современные математические понятия очень далеко отошли от тех реальных явлений, моделями которых они первоначально являлись. Это значит, что современные математические понятия, описываемые системой аксиом, существенно шире, чем первоначальные понятия, а связь между современными математическими понятиями и реальными явлениями не непосредственная, а многократная опосредованная; 2. Математическая теория детерминирована рядом переходов и опосредованной реальной действительности, и поэтому в известных границах творчество математика протекает независимо от видимого внешнего мира. Именно здесь берет начало «принцип свободы» как эвристический прием, широко используемый в математическом исследовании; 3.Аксиоматический метод дает возможность точно анализировать связи и взаимоотношения различных элементов математических теорий, понять их в единстве и развитии. Единство, которое обеспечивает аксиоматический метод, как справедливо отмечает Н. Бурбаки, не есть единство, ‚которое дает скелет, лишенный жизни. Это питательный сок организма в полном развитии, податливый и плодотворный инструмент исследования‛ (1,259). Из всего сказанного ставонится очевидным, что при изучении курса геометрии в общеобразовательной школе необходимо, чтобы учащиеся в первую очередь осознали модельный характер геометрии, специфику моделей-понятий геометрии и особый характер отображения в понятиях-моделях. Усвоение этих основополагающих идей требует развертывания курса геометрии на двух ее уровнях: 1)пропедевтическом, на котором учащиеся должны освоить основной арсенал геометрических поятий как непосредственных моделей форм и свойств видимого мира; 2)основном, на котором учащиеся осваивают современное представление о геометрической науке, понятия которой представляют собой обобщенные модели, допускающие различные интерпретации.

Литература:

1.Бурбаки, Н.Архитектура математики//Очерки по истории математики.-М.: ИЛ,1963.-С.245-259

2.Гильберт, Д. Основания геометрии. ”М.: Учпедгиз, 1948, -491с.

3.Клини, С. Введение в математику. ”М.: Изд.иностр. лит., 1957.-526с.

4.Колмогоров, А.Н. Лобачевский и математическое мышление девятнадцатого века.// Николай Иванович Лобачевский (1793-1943). Огиз Гостехиздат, 1943. с.87-100

5.Костин, В.И. Основания геометрии. -М.:Учпедгиз, 1948, с.109-124

6.Моисеев, Н. Н. Математические модели экономической науки. ,М.: Знание , 1973 ,с .64 7.Пуанкаре, А. Наука и гипотеза. Спб.,1906.-238с.

8.Трайнин, Я. Л. Основание геометрии. -М.:Учпедгиз, 1961, с. 326.

9.Энгельс, Ф. Анти-Дюринг. ”Маркс К., Энгельс Ф., Соч.2-е изд.,т.20, с.16-32.