TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARNING NOSTANDART MASALALARDA QO'LLANILISHI

Hasanov Jamshidbek

Andijon Davlat Universiteti Matematika-mexanika fakulteti

Matematika yo'nalishi 4M1 guruh talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada trigonometrik funksiyalar va ularning xususiyatlari ko'rib chiqiladi. Trigonometrik funksiyalarning aniqlanish sohasi, asosiy formulalar, ularning geometriyadagi va fizikadagi qo'llanish sohalari batafsil tahlil qilinadi. Shuningdek, trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarning yechimi bilan bog'liq masalalar misollar orqali ko'rsatilgan. Maqola matematikani o'rganuvchilar va trigonometrik funksiyalarni amalda qo'llashni istaganlar uchun foydalidir.

Kalit so'zlar: trigonometrik funksiya, davr, aniqlanish sohasi, sinus, kosinus, tangens, kotangens.

Kirish Trigonometrik funksiyalar matematikaning o'ziga xos va asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, ular tekislik va fazoviy geometriyaning muhim qismlarini o'rganishda asosiy vosita hisoblanadi. Ushbu funksiyalar sinus, kosinus, tangens va kotangens kabi tushunchalarning matematik formulalar orqali ifodalanishi va ularning xossalarini o'rganishga asoslanadi. Trigonometrik funksiyalar qadim zamonlardan beri rivojlanib kelgan bo'lib, ularning ilk izlari Ptolemey va Hipparx kabi yunon olimlarining asarlarida uchraydi. Zamonaviy matematikada trigonometrik funksiyalar aylana va sinusoidal to'lqinlar bilan bog'liq masalalarni tadqiq qilish uchun keng qo'llaniladi. Ularning davriylik, cheksizlik, aniqlanish sohasi va o'zaro bog'liqlik kabi xususiyatlari algebraik va geometrik muammolarni yechishda muhim ahamiyatga ega. Bundan tashqari, trigonometrik funksiyalar differensial va integral hisob, fizik hodisalarni modellash, elektronika, muhandislik, astronomiya va boshqa ko'plab fanlarning nazariy asoslarini yaratishda ishlatiladi.

Ushbu maqola trigonometrik funksiyalarning aniqlanish sohasi, asosiy xossalari va ularning qo‘llanilish sohalarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Bunda funksiyalarning o‘zaro bog‘liqligi, grafiklari, trigonometrik tenglamalar va tengsizliklar, shuningdek, amaliy qo‘llanilish misollariga alohida e'tibor qaratiladi. Mazkur tadqiqot matematikani o‘rganuvchilar va bu mavzuga ilmiy qiziqishi bo‘lgan shaxslar uchun nazariy va amaliy ma'lumotlarni o‘z ichiga oladi.

Asosiy qism Trigonometrik funksiyalar nafaqat oddiy tenglamalarni yechishda, balki murakkab va nostandart masalalarni hal qilishda ham asosiy vosita hisoblanadi. Ularning davriylik, o‘zaro bog‘liqlik va geometrik ma’nolaridan foydalanish, ko‘plab murakkab masalalarni sodda formulalar orqali ifodalash imkonini beradi.

Nostandart masalalarni yechishda trigonometrik funksiyalar quyidagi holatlarda qo‘llaniladi:

Geometrik masalalarni trigonometrik tenglamalar orqali ifodalash;

Biror bir shart ostida berilgan ikki o’zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topishda;

Trigonometrik ayniyatlar orqali ifodalarni soddalashtirishda;

Quyida trigonometrik funksiyalar yordamida nostandart masalalarni yechish bo‘yicha bir necha misol keltiriladi. Har bir masalada funksiyalarning xususiyatlari va formulalari amalda qanday qo‘llanishi ko‘rsatiladi.

1-misol. Quyidagi ifodani soddalashtiring.

$$\sqrt{8-2\cdot\sqrt{8+2\cdot\sqrt{2\sqrt{5}+10}}}$$

Yechim: Bu masalani yechishda quyidagi tenglikdan foydalanamiz.

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Bunga ko’ra:

$$\sqrt{2\sqrt{5}+10}=\sqrt{16\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{8}}=4\cdot\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}=4\cos\frac{\pi}{10}$$

$$\sqrt{8+2\cdot\sqrt{2\sqrt{5}+10}}=\sqrt{8+8\cdot\cos\frac{\pi}{10}}=\sqrt{8\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{20}}=4\cos\frac{\pi}{20}$$

$$\sqrt{8-2\cdot\sqrt{8+2\cdot\sqrt{2\sqrt{5}+10}}}=\sqrt{8-8\cos\frac{\pi}{20}}=\sqrt{8\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{40}}=4\sin\frac{\pi}{40}$$

Javob: $4\sin\frac{\pi}{40}$

2-misol. Agar x va y haqiqiy sonlar uchun $x^2+y^2=1$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $3x+4y$ ifodaning eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechim: Masalani yechishda $x=\sin\alpha$ va $y=\cos\alpha$ kabi belgilash kiritamiz. Tabiiyki bu belgilash $x^2+y^2=1$ shartni qanoatlantiradi. U holda masala quyidagi ifodaning eng katta va eng kichik qiymatini topishga keladi.

$$3x+4y=3\sin\alpha+4\cos\alpha$$

Bizga ma'lumki $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\alpha+b\cos\alpha\le\sqrt{a^2+b^2}$ tengsizlik o'rinli.

Bunga ko'ra:

$$-5\le 3\sin\alpha+4\cos\alpha\le 5\Rightarrow -5\le 3x+5y\le 5$$

Javob: Eng katta qiymati 5 va eng kichik qiymati -5

3-misol. Quyidagi yig'indining qiymatini toping.

$$S_n=\frac{1}{2}tg\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}tg\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}tg\frac{\pi}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Yechim: Ushbu yig'indini hisoblashda quyidagi ayniyatdan foydalanamiz.

$$\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}ctg\frac{x}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}$$

Yuqoridagi ayniyatga ko'ra quyidagilarni yozib olamiz.

$$+\begin{cases}\frac{1}{2^2}ctg\frac{\pi}{2^2}-\frac{1}{2}ctg\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2^2}tg\frac{\pi}{2^2}\\ \frac{1}{2^3}ctg\frac{\pi}{2^3}-\frac{1}{2^2}ctg\frac{\pi}{2^2}=\frac{1}{2^3}tg\frac{\pi}{2^3}\\ \frac{1}{2^4}ctg\frac{\pi}{2^4}-\frac{1}{2^3}ctg\frac{\pi}{2^3}=\frac{1}{2^4}tg\frac{\pi}{2^4}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{2^{n+1}}ctg\frac{\pi}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}ctg\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}tg\frac{\pi}{2^{n+1}}\end{cases}\Rightarrow\frac{S_n}{2}=\frac{1}{2^{n+1}}ctg\frac{\pi}{2^{n+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2^n} ctg \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Javob: $S_n = \frac{1}{2^n} ctg \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Xulosa

Trigonometrik funksiyalar – matematikaning asosiy tarkibiy qismi bo‘lib, ularning nazariy jihatlari va amaliy tadbiqlari ko‘plab ilmiy masalalarni hal qilishda muhim ahamiyatga ega. Ushbu maqolada trigonometrik funksiyalarning nazariy asoslari, ularning xususiyatlari va qo‘llanishi keng ko‘lamda ko‘rib chiqildi. Bu mavzu bo‘yicha bilimlar nafaqat matematik, balki texnik va ilmiy sohalardagi muammolarni hal qilishda ham foydalidir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Bronshteyn I.N., Semendyayev K.A. – Matematik formulalar va ma'lumotlar qo‘llanmasi. (O‘zbekiston uchun moslashtirilgan nashrlar mavjud).

2. Kudryavtsev L.D. – Matematik analiz kursi. 1-jild. Moskva: Fizmatlit, 2004.

3. Courant R., John F. – Introduction to Calculus and Analysis. New York: Springer-Verlag, 1989.

4. Spivak M. – Calculus. Houston: Publish or Perish, 2008.

5. Zill D.G. – A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. Boston: Cengage Learning, 2021.

6. Weisstein E.W. – CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. Chapman & Hall/CRC, 2002.

7. Timofeev V.A. – Trigonometriya bo‘yicha masalalar to‘plami. Moskva: Prosveshchenie, 1975.

8. Akchurin R.R. – Geometriya va trigonometriya asoslari. Toshkent: O‘qituvchi, 1988.

9. Kochubei A.N., Raitsin A.A. – Matematika va trigonometriya asoslari. Moskva: Nauka, 1990.

10. Stewart J. – Calculus: Early Transcendentals. Boston: Cengage Learning, 2015.