SUPER KENGAYTMA FUNKTORINING BA'ZI XOSSALARI.

Termiz davlat pedagogika instituti o'qituvchilari

Ismoilov Davronbek Ilhomjon o'g'li

Turaxanov Jaxongir Utkir o'g'li

Annotatsiya.Agar $F \in \zeta_X$ bo'sa, u holda ζ ning har bir elementi bilan F kesishadi, ya'ni $F \cap A$. Ta'rifga ko'ra $F \cap A \in \zeta$. Shunday qilib ζ_X oila yagona aniqlangan. ζ_X={F⊂X:F yopiq va F∩ $A \in \zeta$}

Kalit so'zlar: Topologik fazolar , to'plamlar, ekvivalent, Chegaralanish.

Ta'rif. Agar τ sistema (to'plamostilar oilasi) quyidagi:

1) $\varnothing, X \in \tau$;

2) τ sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi τ ga tegishli bo'lsa, ya'ni $\forall A` \subset A$ uchun

$$\bigcup_{\alpha^1 \in A^1} U_{\alpha^1} \in \tau; \ \ \alpha^1 \in A^1;$$

3) τ sistemaning ixtiyoriy chekli "sondagi" elementlari kesishmasi τ ga tegishli bo'lsa, ya'ni $\forall \alpha_i \in A, i=\overline{1,S}$ $\bigcap_{i=1}^{S} U_{\alpha_i} \in \tau$ shartlarni qanoatlantirsa, τ sistema X to'plamdagi topologiya, $(X;\tau)$ juftlik esa, birgalikda topologik fazo deyiladi. $(X;\tau)$ topologik fazo tashkil qilsa, τ sistemaning elementlari ochiq to'plamlar deb ataladi yoki e'lon qilinadi. Bu ta'rifdagi 1)–3)-shartlar topologiyaning yoki topologik fazoning aksiomalari deb yuritiladi. Ta'rifdan ma'lumki, X to'plam qanday bo'lishidan qat'i nazar, topologik fazodagi ochiq to'plamlar turlicha bo'lishi mumkin ekan. Ko'p hollarda, agar $(X;\tau)$ topologik fazo bo'lsa, τ sistema topologik struktura, X to'plam esa, $(X;\tau)$ topologik fazoning yoki topologiyaning ifodalovchisi – eltuvchisi deb ataladi.

Izoh. Agar biz X to'plamni barcha munosbatlari 2^x bilan belgilasak, τ topologiya (sistema) $\tau \subseteq 2^x$ ni qanoatlantirar ekan.

Misol. Ikki — a va b elementlardan iborat X to‘plam berilgan deylik. τ sistema sifatida bo‘sh to‘plam, X to‘plamning o‘zini va $\{a\}$ dan tashkil topgan to‘plamlar oilasini olamiz, ya’ni $\tau = \{\varnothing; \{a, b\}; \{a\}\}$. Bu τ sistema ta’rifdagi 1)–3)-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Demak, $(X; \tau)$ juftlik topologik fazodir. Bu fazo topologik sodda qurilganiga qaramasdan, muhim va qiziqarli jihatlarga ega bo‘lganligi uchun maxsus nom bilan “bog‘lamli ikki nuqta” deb yuritiladi.

Narmal funktorlar va ularga doir misollar

Agar quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, ***F*** funktor normal funktor deyiladi:

1) ***F*** funktor nuqta va bo‘sh to‘plamni saqlasa;

2) ***F*** funktor kesishmalarini saqlasa;

3) ***F*** monomorfizmni saqlasa;

4) ***F*** epimorflzmni saqlasa;

5) ***F*** uzluksiz bo‘lsa;

6) ***F*** proobrazlar vabikompaktlaming salmog‘ini saqlasa, ya’ni $\omega(X) \leq \tau \Rightarrow \omega(F(X)) \leq \tau$ bo`lsa.

Oxirgi 30—40-yillar mobaynida topologik fazolarning turli kategoriyalarida yuqoridagi xossalarga ega bo‘lgan normal funktorlarning geometrik va topologik xossalari o‘rganib borilmoqda. Normal funktor birorta topologik

fazoda qaralsa, bu fazoning ko‘pgina geometrik xossalarini u yoki bu ma’noda o‘zgartirib yuboradi.

Agar $f : X \to Y$ akslantirishda, $y_0 = f(x_0)$ obrazning ixtiyoriy V atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilsa va u $f(U) \subset V$ ni qanoatlantirsa, u holda f akslantirish X topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasida uzluksiz deyiladi. Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, y_0 nuqta atrofining proobrazi(asli), x_0 nuqta uchun atrof bo‘la oladi. Agar $f : X \to Y$ akslantirish X fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, f akslantirish X fazoda uzluksiz deyiladi.Uzluksiz akslantirishga trivial misol sifatida $id_x : X \to X$ ayniy yoki aynan akslantirishni olish mumkin. Bu akslantirish X ning har bir x nuqtasiga yana shu $i(x)=x$ nuqtasini mos qo'yadi. Bundan ko'rinadiki, u har bir nuqtada uzluksizdir.

Teorema. $f:X\to Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y dagi ixtiyoriy ochiq $V\subset Y$ to'plamning proobrazi (asli) $f^{-1}(V)$ to'plam X fazoda ochiq to'plam bo'lishi zarur va yetarlidir. Bizga ma'lumki, ochiq to'plamlarning to'ldiruvchisi yopiq bo'lganligidan va uzluksiz akslantirishlar ta'rifidan quyidagini tasdiqlash mumkin.

Teorema. $f:X\to Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y fazodagi ixtiyoriy yopiq to'plamning proobrazi X fazoda yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu ikki teorema uzluksiz akslantirishning kriteriyasi deb yuritiladi. Uzluksiz akslantirishga misol sifatida quyidagini aytishimiz ham mumkin: ixtiyoriy $f:X\to Y$ akslantirishda X fazo diskret fazo bo'lsa, yoki Y antidiskret fazo bo'lsa, bu akslantirish doimo uzluksiz bo'ladi. Bulardan xulosa qilib aytishimiz mumkinki, $f:X\to Y$ ning uzluksiz bo'lishi bu fazolardagi topologiyalarga bog'liq ekan. Masalan, bir X to'plamda ikki xil topologiyani olsak, u holda $id_x:X\to X$ ayniy akslantirish doimo uzluksiz bo'lavermaydi. Uzluksiz akslantirishlarning oddiy, biroq muhim xossalaridan biri shuki, bir necha uzluksiz akslantirishlarning kompozitsiyasi yana uzluksiz akslantirishdan iborat bo'ladi.

Agar f va f^{-1} lar bir vaqtda o'zaro uzluksiz bo'lsa, $f:X\to Y$ biektiv akslantirish gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm (ba'zi hollarda topologik akslantirish) deyiladi. Topologik fazo X bilan topologik fazo Y lar orasida kamida bitta gomeomorf (topologik) $f:X\to Y$ akslantirish mavjud bo'lsa, birinchisi ikkinchisiga gomeomorf yoki topologik ekvivalent deyiladi. Topologik ekvivalent yoki gomeomorf fazolar $X\approx Y$ yoki $X\underset{top}{\sim}Y$ ko'rinishda belgilanadi. Gomeomorfizmga $id_X:X\to X$ ayniy akslantirishni trivial misol qilib keltirsa bo'ladi. Shuning bilan birga, tekshirib ko'rish mumkinki, to'g'ri chiziqda aniqlangan ixtiyoriy monoton funksiya ham gomeomorf akslantirish bo'ladi.

Misol. R^n fazoda radiusi 1 ga teng bo'lgan B ochiq sharni olsak, $f:R^n\to B$ akslantirishni $f(x)=x/(1+|x|)$ formula bilan aniqlasak, bu yerda

$x=(x_1, x_2, ..., x_n)\in R^n; \|x\|^2=\sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Bu akslantirish biektivdir. Teskari akslantirish $f^{-1}: B\to R^n$ esa, $f^{-1}(x)=x/(1-\|x\|)$ formula bilan aniqlanadi. f va f^{-1} lar uzluksizdir. Shu sababli f — gomeomorfizm. Demak, R^n dagi ochiq shar $B\sim R^n$.

Agar X topologik fazo Y topologik fazoning birorta Y_0 to‘plamostisiga gomeomorf bo‘lsa, ya’ni $f: X\to Y_0\subset Y$ gomeomorfizm bo‘lsa, u holda X fazo Y fazoga topologik joylashgan yoki X fazo Y fazoda topologik yotadi yoxud Y fazo X fazoni o‘zida saqlaydi, deyiladi. Bunday gomeomorfizm joylash yoki joylashtirish deyiladi.

Topologik fazolarning gomeomorf akslantirishlarda o‘zgarmay qoladigan xossalari ularning topologik xossalari deb yuritiladi. Shu sababli topologiyani shunday akslantirishlarda fazoning topologik xossalarini o‘rganuvchi fandir, desak ham bo‘ladi.

Teorema. $f: X\to Y$ ochiq (mos ravishda yopiq) biektiv akslantirish gomeomorfizmdir.

Natija. $f: X\to Y$ biektiv akslantirish gomeomorfizm bo‘lishi uchun $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Topologik fazoning super kengaytmasi tushunchasi De Groot tomonidan kiritilgan. Aytaylik ζ $-X$ fazoning bo`sh bo`lmagan yopiq qism to`plamlari oilasi bo`lsin.

Ta’rif. Aytaylik ***X*** fazoning yopiq qism to’plamlarining ζ sistemasi zanjirlangan deyiladi, agar ζ ning istalgan ikki elementi kesishsa.

Misol: zanjirlangan sistemaga misol sifatida ixtiyoriy uchburchakning tomonlaridan iborat bo`lgan sistemani olishimiz mumkin. Demak, $\Delta ABC$ uchburchakning tomanlaridan iborat $\zeta = \{AB, BC, CA\}$ sistemasini qaraylik. Bu tomonlar uchun $AB\cap BC=B,\ CA\cap AB=A\ \ BC\cap CA=C$ munosabatlar o`rinlidir.

Teorema. ***X*** fazo superkompakt bo’ladi shunda va faqat shundaki qachonki unda yopiq predbaza mavjud bo’lib har bir zanjirlangan qism sistema bo’sh bo’lmagan kesishmaga ega bo’lsa [1].

Цорна lemmasiga ko’ra har qanday zanjirlangan sistemani maksimal zanjirlangan sistemagacha(MZS) to’ldirish mumkin, ammo bunday to’ldirish qoida tariqasida yagona emas [1].

Ta’rif. $\boldsymbol{X}$ fazoning ζ zanjirlangan sistemasi MZS deyiladi, agar u quydagi to’liq xususiyatga ega bo’lsa, ya’ni agar A⊂X yopiq to’plam ζ ning har bir elementi bilan kesishsa, bunda $A\epsilon$ ζ .

Teorema. Agar yopiq A to’plam zanjirlangan ζ-sistemaning har bir elementi bilan kesishsa $\zeta \cup \{A\}$ sistema ham zanjirlangandir. Bunda A to’plam $\boldsymbol{X}$ fazoning yopiq qism to’plami bo’lsin. U holda A fazoning istalgan MZS ζ ni $\boldsymbol{X}$ fazoning yagona MZS ζ_X o’z ichiga oladi.

Isboti. Agar $F \in \zeta_X$ bo’sa, u holda ζ ning har bir elementi bilan F kesishadi, ya’ni $F \cap A$. Ta’rifga ko’ra $F \cap A \in \zeta$. Shunday qilib ζ_X oila yagona aniqlangan.

ζ_X={F⊂X:F yopiq va F∩ $A \in \zeta$}

Ta’rif: O(U) ko`rinishdagi to`plamlar oilasi $\lambda X(O(X) = \lambda X$ fazoni qoplaydi. Shuning uchun λX da topologiyaning ochiq old bazasini hosil qiladi. Bu old baza orqali aniqlangan topologiya Volmen topologiyasi deyiladi. **Volmen topologiyasi** bilan birgalikda λX to`plami X fazoning **super kengaytmasi** deyiladi.

Natija: X fazoning λX super kengaytmasi super kompaktdir.

Teorema: Har qanday X fazoning super kengaytmasi λX super kompaktdir.

Isbot: A^+ turdagi to`plamlardan tashkil topgan yopiq $\lambda X$ oldbaza. $\eta = \{A_\alpha^+ : \alpha \in \widehat{U}\}$ sistemasi ulangan bo`lsin. U holda $\varepsilon = \{A_\alpha : \alpha \in \widehat{U}\}$ sistemasi ham zanjirlangan ζ o`zida saqlaydigan har qanday ζ' maksimal zanjirlangan sistemani $\cap \ \eta$ ga tegishliligini tekshirish qiyin emas.

Tasdiq: λX super kengaytma deyarli hech qachon X fazoning kengaytmasi bo`lmaydi. Shunday, agar $X$ bikompakt hech bo`lmaganda uch nuqtaga ega bo`lsa u holda u o`zining super kengaytmasining o`z qism to`plami. Rostan ham, $x_1, x_2, x_3 - X$ fazoning har xil nuqtalari bo`lsin. U holda shu nuqtalarning juftliklaridan tashkil topgan zanjirlangan sistema $\eta(x)$ ga tegishli bo`lmagan X fuksiyaning ξ maksimal zanjirlangan sistemagacha to`ldiradi.

Agar X kompakt bo’lsa uning λX superkengaytmasi ham kompakt bo’ladi. $\rho - X$ kompaktida metrika bo’lsin. $B(F,\varepsilon)$ orqali F to’plam atrofidagi $\{x : \rho(x,F) \le \varepsilon\}$ yopiq ξ-

shartni belgilaylik. $\overline{\rho}(\xi_1,\xi_2)=\inf\{\varepsilon\geq 0: F\in\xi_1\Rightarrow B(F,\varepsilon)\in\xi_2\}$ deb hisoblagan holda λX da $\overline{\rho}$ metrikani aniqlaylik. Uni metrikaligini tekshiramiz.

Metrikaning 1- aksiomasi bajarilishi ravshan. Endi simmetriya aksiomasini bajarilishini tekshiramiz.

Agar $F_2\in\xi_2$ va $B(F_2,\varepsilon)\in\xi_1$ bo'lsa, 2.1.8 teoremaga ko'ra $F_1\cap B(F_1,\varepsilon)=\varnothing$ bo'ladigan $F_1\in\xi_1$ to'plam mavjud. U holda F_1 to'plam uchun $F_1\cap B(F_1,\varepsilon)=\varnothing$ munosabat bajariladi, ya'ni $B(F_1,\varepsilon)\notin\xi_2$ o'rinlidir.

Uchburchak aksiomasini qanoatlantirishni ko'rsatamiz.

$\overline{\rho}(\xi_1,\xi_2)=\varepsilon_1$, $\rho(\xi_2,\xi_3)=\varepsilon_2$ bo'lsin. U holda $\forall F\in\xi_2$ toplamii uchun $B(F,\varepsilon_1)\in\varepsilon_2$ va $B(B(F,\varepsilon_1),\varepsilon_2)\in\varepsilon_3$ larga egamiz. Ammo $B(B(F,\varepsilon_1),\varepsilon_2)=B(F,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ ning aniqlanishiga $\overline{\rho}$ — λX to'plamda ikki karra $\exp\exp X$ eksponentadan ρ_H^2 Xausdorf metrikasi bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib $(\lambda X,\overline{\rho})$ $(\exp\exp X,\rho_H^2)$ ga izometrik joylashgan.

Lemma. $(\lambda X,\overline{\rho})$ fazo kompakt bo'ladi.

Isbot. $\forall x=\{\xi_1,...,\xi_n,...\}\subset(\lambda X,\overline{\rho})$ ketmaketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikni har doim mavjud ekanligini ko'rsatamiz. Zarur bo'lgan holda qism ketma-ketlikka o'tganda x ketma-ketligi $(\exp\exp X,\rho_H^2)$ kompaktda ξ sistemaga yaqinlashadi deb hisoblasa bo'ladi. Avval ξ sistema zanjirlanganligini ko'rsataylik, ba'zi $F_1,F_2\in\xi$ toplamlar uchun $F_1\cap F_2=\varnothing$ tenglik o'rinli. U holda ba'zi bir $\varepsilon>0$ uchun $B(F_1,\varepsilon)\cap B(F_2,\varepsilon)=\varnothing$ (7) shunday n soni topiladiki $\overline{\rho}(\xi_n,\xi)<\varepsilon$ bo'lsin. U holda $B(F_i,\varepsilon)\in\xi_n$, ammo bu ξ_n ning zanjirlanganligiga yoki (7) shartga zid. ξ sistemani maksimal zanjirlangan sistema ekanligini ko'rsatamiz.

$F\in\exp X$ to'plam ξ sistemaning har bir elementi bilan kesishsin. U holda $\varepsilon>0$ uchun $\overline{\rho}(\xi_n,\xi)<\varepsilon$ bo'lgan holda $B(F,\varepsilon)$ ξ_n sistemaning har bir elementi bilan kesishadi. Demak, 2.1.8-teoremaga ko'ra $B(F,\varepsilon)$ barcha ξ_n sistemalariga tegishli, aniq bittasidan boshlanib. Ammo u holda $B(F,\varepsilon)\in\xi$, bundan 2.24 ga ko'ra $F\in\xi$. Kelib chiqadigani ξ-maksimal zanjirlangan sistema (MUT) 2.1.8- teoremaga ko'ra lemma isbotlandi.

Endi $\overline{\rho}$ metrikasi λX to'plamida supergengaytma topologiyasini indutsirlaydi. Yuqorida isbotlangan lemma asosida $(\lambda X, \overline{\rho}) \to \lambda X$ akslantirish uzluksiz ekanligini tekshirish qiyin emas, U X ga ochiq to'plam $\xi \in O(U)$ bo'lsin. Bu $F \subset U$ bo'lgan shunday $F \in \xi$ mavjudligini anglatadi. Ammo F ba'zi bir $B(F,\varepsilon)$ ning ξ atrofi bilan U ochiq to'plamida joylashgan. U holda $\overline{\rho}(\xi', \xi) < \varepsilon$ $\xi' \in O(U)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Teorema Har qanday X bikompaktining λX supergengaytmasi $\exp\exp X$ ikki karra eksponentaning qismfazosidir.

Isbot. Ixtiyoriy X bikompakti- kompaktlardan va ustiga akslantirishlardan tashkil topgan $S = \left\{ X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, U \right\}$ spektr uchun chegara bo'ladi. Agar $f : X \to Y$ epimorfizm bo'lsa, u holda $\lambda f = \exp\exp f / \lambda X$ bo'ladi. S spektriga λ va $\exp\exp$ funktorlarini tasirlantiramiz λS va $\exp\exp S$ spektrining chegarasi λX va $\exp\exp X$ bikompaktlariga gomeomorfdir. λS spektrning barcha fazolari o'zining metrizatsiyalanuvchanligiga ko'ra $\exp\exp S$ spektrining mos keladigan fazolarining qismfazolari, λS spektri proyeksiyalari esa –shu qism fazolardagi $\exp\exp S$ spektri proyeksiyasining chegaralanishlari bo'ladi. Shuning uchun $\lim \lambda S = \lambda X$ chegara $\lim \exp\exp S = \exp\exp X$ ga joylanadi va bu joylashishni ko'rinib turganidek ayniyat joylashishi bilan mos keladi. Teorema isbotlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. T.F. Jo'rayev Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar Toshkent "Tafakkur bo'stoni"-2012

2. Fedorchuk V.V., Filippov V.V.. General topology. The basic constructions. Moscow, 2014.

3. D. Maya, P.P. Covarrubias, R.P. Mendoza, Cardinal functions of the hyperspace of convergent sequences // Math. Slovaca 68 (2018), No. 2, 431-450.

4. O.Okunev, A.R.Paramo, Functional tightness, R-quotient mappings and products // Topology and its Applications 228 (2017) 236-242.,

5. Букур И., Деляну А.. Введение в теорию категорий и функторов. Мир, 1972

6. Бурбаки Н. Обшая топология. Основные структуры. М. Наука, 1968

7. Адамс Д.Ж.. Бесконечнократные пространства петель. Мир, 1983

8. Mamadaliyev N. K., Ismoilov D. I. Minimal tightness of the hyperspace of convergent sequences-219, “Actual problems of stochastic analysis” Tashkent-2021

9. Ismoilov D.I. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar giperfazosining minimal tesnotasi

“Matematik fizika va matematik modellashtirishning zamonaviy muammolari” Qarshi 2021-yil.

10. Ismoilov D.I. Topological space and continuous reflections “Eurasian Scientific Herald” -2022.

11. Kholidakhon Komilova[1*], Zardila Shakhobiddinova [1], Davronbek Ismoilov[2] and Astan Ismailov[3] “Simulation of oscillations of composite pipelines conveying pulsating fluid” E3S Web of Conferences-2023

12. Safarov To’lqin Nazarovich. Ismoilov Davron Ilhomjon o’g’li, “NOYEVKLID GEOMETRIYASIDA AYLANMA SIRTLARNI O’RGANISH METODIKASI” Zamonaviy ta’lim-2022.