UDK 517.984

UCH O‘LCHAMLI QO‘ZG‘ALISHGA EGA FRIDRIXS MODELINING SPEKTRI HAQIDA

Husenova Jasmina To‘lqinovna
Buxoro davlat universiteti
j.t.husenova@buxdu.uz
ORCID 0009-0003-3365-7922

Annotatsiya. Ushbu ishda $L_2[-\pi;\pi]$ kompleks Hilbert fazosida aniqlangan uch o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modeli qaralgan. Bu model o‘zi aniqlangan fazoda chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lib, uning muhim spektri mashhur Veyl teoremasidan foydalanib topilgan. Integral tenglamalar nazaryasi usullari yordamida Fridrixs modeliga mos Fredgolm determinanti qurilgan hamda uning diskret spektri aniqlangan.

Kalit so‘zlar: Fridrixs modeli, qo‘zg‘alish operatori, muhim va diskret spektrlar, Fredgolm determinanti.

Kvant mexanikasi, statistik mexanika va gidrodinamikaning ko‘plab dolzarb masalalari Fridrixs modeli deb ataluvchi operatorlarning spektral xossalalarini, xususan, spektrini o‘rganish masalasiga keltiriladi. Fridrixs modelining spektral xossalari ko‘plab ishlarda tahlil qilingan [1-5]. Ushbu ishda $L_2[-\pi;\pi]$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan hamda uch o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modelining muhim va diskret spektrlari topilgan. Ta’kidlash joizki, tadqiq qilingan Fridrixs modelini panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Hamiltonian sifatida ham qarash mumkin.

$L_2[-\pi;\pi]$ kompleks Hilbert fazosida

$$H = H_0 - V_1 - V_2 - V_3 \tag{1}$$

ko‘rinishdagi Fridrixs modeli deb ataluvchi operatorni qaraymiz. Bu yerda H_0 operator $u(\cdot)$ funksiyaga ko‘paytirish operatori bo‘lib, quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \quad f \in L_2[-\pi;\pi],$$

V_α operatorlar esa qo‘zg‘alish operatorlari (integral operatorlar) bo‘lib,

$$(V_\alpha f)(x) = v_\alpha(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_\alpha(t)f(t)dt, \ \alpha = 1,2,3, \qquad f \in L_2[-\pi;\pi]$$

ko‘rinishda aniqlangan. Fridrixs modelining $u(\cdot)$, $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ va $v_3(\cdot)$ parametr funksiyalari $[-\pi;\pi]$ kesmada aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar. Bundan tashqari, $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ va $v_3(\cdot)$ parametr funksiyalar chiziqli bog‘lanmagan bo‘lsin deb faraz qilamiz.

Parametr funksiyalarga qo‘yilgan bunday shartlarda (1) tenglik bilan aniqlangan H Fridrixs modeli $L_2[-\pi;\pi]$ Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

Matnda Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektri $\sigma(\cdot)$ kabi, muhim spektri $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ kabi, diskret spektri esa $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ kabi belgilangan. Bunda operatorning barcha chekli karrali yakkalangan xos qiymatlari to‘plamiga uning diskret spektri deyiladi. Diskret spektrning spektrgacha bo‘lgan to‘ldiruvchisiga uning muhim spektri deyiladi.

Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarda muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra H Fridrixs modelining muhim spektri H_0 qo‘zg‘almas operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi. H_0 operator $u(\cdot)$ uzluksiz funksiyaga ko‘paytirish operatori bo‘lganligi bois, faqat sof muhim spektrga ega. Shunday qilib, quyidagi tengliklar o‘rinlidir:

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = [m; M].$$

Bu yerda m va M sonlari

$$m := \min_{x\in[-\pi;\pi]} u(x), \qquad M := \min_{x\in[-\pi;\pi]} u(x)$$

tengliklar yordamida aniqlanadi.

H Fridrixs modelining diskret spekrini aniqlash maqsadida $\mathbb{C}\backslash[m;M]$ sohada regulyar bo‘lgan

$$I_{\alpha\beta}(z):=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{v_\alpha(t)\,v_\beta(t)}{u(t)-z}dt,\quad \alpha,\beta=1,2,3;$$

$$\Delta(z):=\begin{vmatrix}1-\ I_{11}(z) & -I_{12}(z) & -I_{13}(z)\\ -\ I_{21}(z) & 1-I_{22}(z) & -I_{23}(z)\\ -\ I_{31}(z) & -\ I_{32}(z) & 1-I_{33}(z)\end{vmatrix}$$

funksiyalarni kiritamiz.

1-lemma. H operatorning diskret spektri uchun

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H\ )=\{\ z\in\mathbb{C}\backslash[m,M]:\Delta(z)=0\}$$

tenglik o‘rinli.

Ishning asosiy natijasi quyidagi teorema shaklida bayon qilingan.

1-teorema. H Fridrixs modelining spektri uchun

$$\sigma(H\ )=[m;M]\cup\{\ z\in\mathbb{C}\backslash[m,M]:\Delta(z)=0\}$$

tenglik o‘rinlidir.

Mazkur teorema H Fridrixs modelining xos qiymatlar soni va ularning joylashuv o‘rni hamda rezolventa operatorini qurishda muhim ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati.

1. М.Э.Муминов. О выражении числа собственных значений модели Фридрихса. Матем. заметки. 82:1 (2007), С. 75-83.

2. Б.И.Бахронов, Т.Х.Расулов, М.Рехман. Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана. Известия вузов. Математика. 7 (2023), С. 3-12.

3. S.Albeverio, S.N.Lakaev, Z.I.Muminov. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations. J. Math. Anal. Appl., 330 (2007), P. 1151-1168.

4. B.I.Bahronov, T.H.Rasulov. On the numerical range of a Friedrichs model with rank two perturbation: threshold analysis technique. AIP Conf. Proc. 2764 (2024), 030007-1 - 030007-10.

5. T.H. Rasulov, Z.D. Rasulova. Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. **5**:3 (2014), pp. 327-342.