СУБДИСКРИМИНАНТ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хабибова Амира Улугбековна

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, факультет математики, стажёр-исследователь

В этой работе рассматриваются задачи нахождения числа различных и кратных корней, числа действительных и комплексных корней полиномиальных уравнений с использованием субдискриманантов.

Рассмотрим приведённый многочлен от одной вещественной переменной x :

$$f_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n \qquad (1)$$

n-й степени с вещественными коэффициентами $a_1, a_2, \dots a_n$. n-мерное вещественное пространство $\Pi \equiv R^n$ его коэффициентов $a_1, a_2, \dots a_n$ назовём пространством коэффициентов многочлена (1).

Определение 1. Дискриминантным множеством $D(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовём множество всех точек пространства коэффициентов Π, в которых $f_n(x)$ имеет кратные корни.

Условие кратности корней многочлена $f_n(x)$ равносильно тому, что сам многочлен и его первая производная $f_n'(x)$ имеют нетривиальный общий делитель, т. е. $deg\ gcd(f_n, f_n') > 0$, где $deg\ f(x)$ — степень многочлена $f(x)$, а $gcd(f, g)$ — наибольший общий делитель пары многочленов f(x) и g(x). Индикатором наличия кратного корня многочлена служит его дискриминант $D(f_n)$, который с точностью до знака является результантом самого многочлена и его первой производной

$$D(f_n) = (-1)^{n(n-1)/2} R(f_n, f_n').$$

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием существования кратных корней у многочлена $f_n(x)$ является равенство нулю его дискриминанта $D(f_n)$.

В пространстве Т корней многочлена $f_n(x)$ дискриминант задаётся следующим образом.

Определение 2. Пусть $t_i, i = 1,\dots,n,$ корни многочлена $KL,$ тогда его дискриминант $D(f_n)$,задаётся формулой

$D(f_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(t_i - t_j)^2$

Утверждение 1. При $D(f_n) > 0$, число пар комплексно-сопряжённых корней многочлена (1) чётно, при $D(f_n) < 0$ — нечётно.

Определение 3. $k -$ й субдискриминант $D^{(k)}(f_n),\ k = 0,\dots,n-2$ многочлена $f_n(x)$задаётся следующей формулой:

$$D^{(k)}(f_n) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\} \\ (I)=n-k}} \prod_{\substack{(j,l)\in I \\ l>j}} (t_j - t_l)^2, \qquad (3)$$

где (I) — мощность множества I. Для $k = n - 1$ положим $D^{(n-1)}(f_n) = n$, а для $k = n$ положим $D^{(n)}(f_n) = 1$.

Очевидно, что $D^{(0)}(f_n) = D(f_n)$.

Утверждение 2. Пусть в последовательности субдискриминантов $D^{(j)}(f_n)$, j = 0, . . . , n − 2, первым отличным от нуля является $d -$ й субдискриминант, $0 \le d \le n - 1$. Тогда $deg\,\tilde{f}_n(x) = d,$ т. е. исходный многочлен имеет ровно $n - d$ различных корней, где

$$\tilde{f}_n(x) = gcd(f_n(x), f_n'(x)).$$

Пусть P(s) есть число знакопостоянств в последовательности s, а V(s) — число знакоперемен этой последовательности.

Утверждение 5. Число вещественных корней многочлена fn(x) равно величине $PmV(f_n)\ def\ = P(s) - V(s)$.

Пример 1. Составить многочлены с разными структурами корней

Набор корней

>RealRoots:=[-2,-1,3,5]:

CmplRoots:=[1-I,1+I,2-3*I,2+3*I]:

IrRoots:=[2-sqrt(5),2+sqrt(5),1+I*sqrt(3),1-I*sqrt(3)]:

Составить многочлены с разными структурами корней

>f4RR:=expand(mul((x-r),r in RealRoots));

f4CR:=expand(mul((x-r),r in [op(RealRoots[2..3]),op(CmplRoots[1..2])]));

f4CC:=expand(mul((x-r),r in CmplRoots));

f4IR:=expand(mul((x-r),r in [op(RealRoots[2..3]),op(IrRoots[1..2])]));

f4IC:=expand(mul((x-r),r in [op(CmplRoots[1..2]),op(CmplRoots[3..4])]));

$$f4RR := x^4 - 5 * x^3 - 7 * x^2 + 29\,x + 30$$

$$f4CR := x^4 - 4 * x^3 + 3 * x^2 + 2 * x - 6$$

$$f4CC := x^4 - 6 * x^3 + 23 * x^2 - 34 * x + 26$$

$$f4IR := x^4 - 6 * x^3 + 4 * x^2 + 14\,x + 3$$

$$f4IC := x^4 - 6 * x^3 + 23 * x^2 - 34 * x + 26$$

Пример 2. Вычислить последовательность субдискриминантов для вышеуказанных функций:

>SubD_f4RR:=[1,seq(SubDiscrim(f4RR,x,k),k=3..0,-1)];

SubD_f4CR:=[1,seq(SubDiscrim(f4CR,x,k),k=3..0,-1)];

SubD_f4CC:=[1,seq(SubDiscrim(f4CC,x,k),k=3..0,-1)];

SubD_f4IR:=[1,seq(SubDiscrim(f4IR,x,k),k=3..0,-1)];

SubD_f4IC:=[1,seq(SubDiscrim(f4IC,x,k),k=3..0,-1)];

$$SubD\_f4RR := [1, 4, 131, 9368, 2822400]$$

$$SubD\_f4CR := [1, 4, 24, 600, -40000]$$

$$SubD\_f4CC := [1, 4, -76, -5648, 1040400]$$

$$SubD\_f4IR := [1, 4, 76, 1408, 81920]$$

$$SubD\_f4IC := [1, 4, -76, -5648, 1040400]$$

Пример 3. Найти число действительных корней:

>PminusM(SubD_f4RR);

PminusM(SubD_f4CR);

PminusM(SubD_f4CC);

4

20

factor(f4RR);

factor(f4CR);

factor(f4CC);

$$(x-3)(x-5)(x+2)(x+1)$$

$$(x-3)(x+1)(x\char`^2-2*x+2)$$

$$(x\char`^2-2x+2)(x\char`^2-4x+13)$$

Пример 4. Найти число различных корней многочлена:

> F1:= 2*x^6+6*x^5+6*x^4+ x^3-3*x^2-3*x-1;

$F1:=2*x\char`^6+6*x\char`^5+6*x\char`^4+x\char`^3-3*x\char`^2-3*x-1;$

>seq(SubDiscrim(F6,x,k),k=0..4);

$$0,0,-5832,432,72$$

factor(gcd(F6,diff(F6,x)));

$$(x+1)^2$$

factor(F1);

$$(2x^3-1)(x+1)^3$$

$deg\ \tilde{f}_n(x)=\ 2\Rightarrow$ число различных корней:6-2=4

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Батхин. «Современные методы исследования особенностей алгебраических многообразий» магистерская программа, осенний семестр, 2022–2023 уч. Год

2. Кокс Д., Литтл Дж, О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы.- М.: Мир, 2000.